CT MM61 Equations différentielles?
17 mai 2019

Exercice 1. 1) Soient X une $v.a.r$ de fonction répartition $F_X(t) := t\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t)$. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

2) Soit X $v.a.r$ suivant la loi uniforme sur $[0,\ 1]$. On pose $Y := min(X, 1-X)$ et $Z := Max(X, 1-X)$. Montrer que Y suit la loi uniforme sur $[0,\ \frac{1}{2}]$ et Z suit la loi uniforme sur $[\frac{1}{2},\ 1]$.

Exercice 2. Soit D le disque de centre 0 et de rayon $r > 0$.

$$D := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2;\ s^2 + t^2 \leq r^2\}.$$

On désigne par (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans D, dont la densité conjointe est définie par :

$$D_{(X,Y)}(s,t) := \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & \text{si } (s,t) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer les densités maarginales D_X et D_Y.
2) Calculer $Cov(X, Y)$.
3) X et Y sont elles indépendantes.

Exercice 3. L'objet de cet exercice est de montrer que la limite en loi d'une suite de $v.a.r$ de Poisson est une $v.a.r$ de Poisson.
Soit (X_n) une suite de $v.a.r$ qui vérifie:
(H1) $\forall n$, $Loi(X_n) = \pi(\lambda_n)$, avec les $\lambda_n > 0$.
(H2) (X_n) converge en loi vers une $v.a.r$ X.
1) Montrer que la suite (λ_n) est bornée.
2) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Loi(X) = \pi(\lambda)$.

Exercice 4. Soient (U_n) une suite de v.a.r vérifiant:
(H1)- $\forall n$, $loi(U_n) = \mathcal{N}(0,1)$
(H2)- les U_n sont $i.i.d.$
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit une suite de v.a.r (X_n) par:

$$X_n := \theta X_{n-1} + U_n \qquad \text{avec} \qquad X_0 := U_0$$

1) Montrer que pour tout n, X_n est gaussienne.
2) Déterminer, pour tout n, la moyenne et la variance de X_n.
3) Montrer que si $\theta < 1$, la suite X_n converge en loi. Et déterminer la loi limite.

1

UNIVERSITÉ DE TOULON
Faculté des Sciences et Techniques

Licence 3ème année

Module M64

Analyse complexe ?

Durée de l'examen : 2 heures.
Documents autorisés : Notes de cours manuscrites, à l'exclusion de tout autre document et appareil électronique.
Les deux parties, à rédiger séparément, seront chacune notées sur 10 points.

Partie A

Question 1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soient $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions dont les domaines sont non vides et qui sont minorées sur E. On définit alors l'inf-convolution de f et de g comme étant la fonction $f \square g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ donnée pour tout $x \in E$ par

$$f \square g(x) = \inf\{f(y) + g(x-y) : y \in E\}.$$

1. Exemple 1. Si $E = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ et $g : x \mapsto x^2$, alors la fonction $f \square g$ est donnée pour tout réel x par

$$f \square g(x) = \inf\left\{y^2 - 3y + 1 + (x-y)^2 : y \in \mathbb{R}\right\}$$

   Calculer $f \square g(x)$ pour tout réel x.
2. Exemple 2. On considère $E = \mathbb{R}^d$ (pour $d \geqslant 1$) muni du produit scalaire usuel $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$. Soit aussi $f : x \mapsto \langle Ax, x \rangle + \langle \xi, x \rangle$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2}\langle x, x \rangle$ où $\xi \in \mathbb{R}^d$ et où $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive. Calculer la fonction $f \square g$.
3. Démontrer que la fonction $f \square g$ ne prend pas la valeur $-\infty$ et que son domaine est non vide.
4. Démontrer que si les fonctions f et g sont convexes sur E alors $f \square g$ est convexe sur E. Si f ou g n'est pas convexe, la fonction $f \square g$ est-elle encore convexe ? (Justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple).
5. Démontrer la relation $(f \square g)^* = f^* + g^*$ sur E^*.

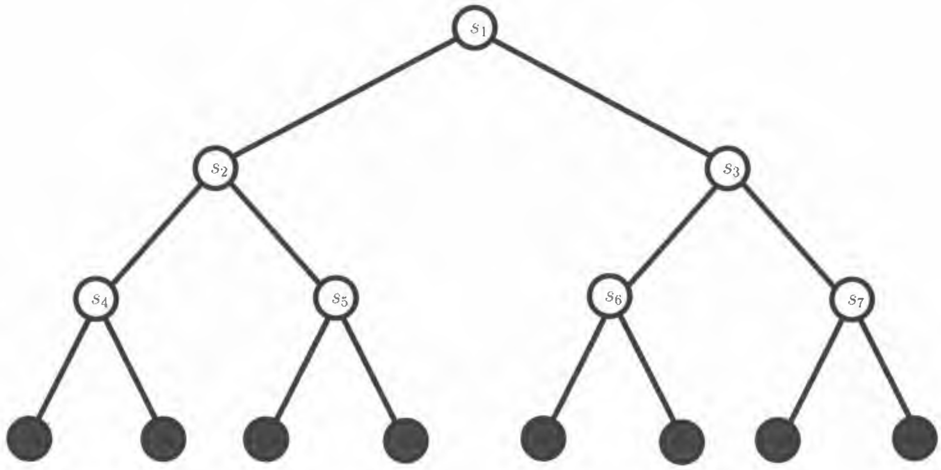
Question 2. On s'intéresse à l'ensemble suivant :

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant \frac{1}{4}(x_1)^2 - 1,\ x_2 \leqslant 2 - 2x_1 \text{ et } x_2 \geqslant -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_1 \right\}.$$

1. Dessiner X dans un repère orthonormé. Cet ensemble X est-il compact ?
2. La fonction $f : (x_1, x_2) \mapsto 2x_1 + x_2$ est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle coercive ?
3. Résoudre graphiquement le problème $\max\{f(x) : x \in X\}$.

Partie B

Question 3. On étudie le modèle d'Ising sur un arbre binaire A_L, voir la figure ci-dessous représentant l'arbre A_4. Les noeuds de l'arbre A_L sont indicés par les entiers $x \in N_L = \{1, 2, 3, \ldots 2^L - 1\}$ et à chaque noeud x est associé une variable de spin $s_x \in \{-1, 1\}$.



L'Hamiltonien du modèle est donné par

$$H_L(s) = -\sum_{x \in N_{L-1}} s_x(s_{2x} + s_{2x+1}).$$

On impose en outre des conditions au bord en fixant $s_x = +1$ pour $x \in N_L \setminus N_{L-1}$ (les noeuds rouges de la figure ci-dessus). Si $\beta > 0$ est l'inverse de la température et

$$\Omega_L^+ = \{s = (s_x)_{x \in N_L} | s_1 = +1, s_x \in \{-1, +1\} \text{ pour } 2 \leqslant x \leqslant 2^{L-1} - 1, s_x = +1 \text{ pour } 2^{L-1} \leqslant x \leqslant 2^L - 1\},$$

$$\Omega_L^- = \{s = (s_x)_{x \in N_L} | s_1 = -1, s_x \in \{-1, +1\} \text{ pour } 2 \leqslant x \leqslant 2^{L-1} - 1, s_x = +1 \text{ pour } 2^{L-1} \leqslant x \leqslant 2^L - 1\},$$

alors la loi de probabilité du spin racine s_1 est donnée par

$$P_L(s_1 = \pm 1) = \frac{Z_L^\pm}{Z_L^- + Z_L^+}, \qquad Z_L^\pm = \sum_{s \in \Omega_L^\pm} e^{-\beta H_L(s)}.$$

(a) Avec $R_L = P_L(s_1 = +1)/P_L(s_1 = -1)$, montrer que l'espérance de s_1 est positive si et seulement si $R_L > 1$.

(b*) [Question facultative dont on pourra admettre la conclusion. Bonus de 3 points sur la partie B à ceux qui y répondent de manière satisfaisante.] Montrer que pour $L \geqslant 1$ on a $R_{L+1} = f(R_L)^2$ où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est donnée par

$$f(r) = \frac{1 + e^{2\beta} r}{e^{2\beta} + r}.$$

(c) En posant $Q_L = \sqrt{R_L}$ et en supposant que $Q_L \to Q_*$ lorsque $L \to \infty$, montrer que la limite Q_* satisfait l'équation au point fixe $Q_* = g(Q_*)$ où $g(q) = f(q^2)$.

(d) Noter que $g(1) = 1$. Montrer qu'il existe $\beta_c > 0$, qu'on déterminera, tel que g admette un seul point fixe pour $\beta < \beta_c$ et trois points fixes pour $\beta > \beta_c$. Montrer que dans le premier cas 1 est un point fixe stable ($|g'(1)| < 1$) alors que dans le second cas 1 est instable ($|g'(1)| > 1$), les 2 autres points fixes étant stables.

(e) Montrer que $Q_2 > 1$, en déduire que $Q_* > 1$ et interpréter ce résultat.