n31.

EXAMEN de MATHEMATIQUES, Janvier 2019, Licence 2ème année. ANALYSE 2

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé pour cette épreuve. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 On considère l'espace $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On note par D la droite $D = \{(t,t); t \in \mathbb{R}\}$.
1) Soit $x = (x_1, x_2) \notin D$. Donner l'expression de la fonction $f(y) = \|x - y\|, y \in D$.
2) Montrer que la fonction f admet admet un minimum pour un certain $y_0 \in D$ que l'on précisera. Quelle est la valeur de ce minimum ?
2) Montrer que la droite passant par les points x et y_0 est orthogonale à D. On dira que y_0 est la projection orthogonale de x sur D.
3) Rappeler la définition d'une boule ouverte puis d'un sous ensemble ouvert de l'espace euclidien E.
4) En utilisant les questions précédentes, montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est un sous ensemble ouvert de E (On pourra utiliser que si $y \in D$, $\|x - y\| \geq \|x - y_0\|$).

Exercice 2 Soit f la fonction définie par

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to f(x_1, x_2) = \cos(\pi\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$$

1) Montrer que f est une fonction continue.
2) Soit l'ouvert $O := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que f est de classe $C^1(O)$.
3)Montrer que l'ensemble des points critiques de f dans O est une réunion de sous ensembles $E_k, k \in \mathbb{N}^*$ que l'on précisera. Etudier la nature de ces points critiques.
4) Montrer que les dérivées partielles premières de f, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$ existent et donner leur valeur.
5) Est ce que f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$? Justifier votre réponse.
6) Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f et préciser sa nature.
7) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que sa différentielle en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par : $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, D_{(a,b)}f(h,k) = C(a,b)(ah + bk)$ où $C(a,b)$ est un coefficient réel que l'on déterminera.
8) Montrer que la fonction

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to g(x_1, x_2) = f(x_1 - 1, x_2)$$

est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Déterminer les points critiques de g.

Exercice 3 Soit T le triangle de sommet $A(0,0,)$, $B(1,0,)$ et $C(1,1,)$.
1) Représenter graphiquement le domaine T dans le plan et donner une représentation analytique de T.
2) Calculer l'intégrale simple $J = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{(1+t^2)} dt$

1

3) On considère la fonction : $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Justifier que f est une fonction intégrable sur T.
4) A partir des questions précédentes, déduire la valeur de $I = \int_T f(x,y)dxdy$.

Exercice 4 Soit $0 < a < b$ deux réels et C le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini comme

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

On considère l'intégrale suivante

$$I = \int_C e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

1) En utilisant les coordonnées polaires montrer que $C = \{(r,\theta), a \leq r \leq b, \theta \in [0, \pi/2]\}$.
2) Déduire la valeur de I.
3) Calculer la limite de I lorsque $a \to 0$ puis lorsque $b \to +\infty$.

2

M32?

EXAMEN DE MP33-Algébre linèaire. Juin 2019. Note sur 20.
N.B. : le cours est autorisé.

Exercice 1.
Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z, w) = (-x + z, 2y, x - 2z, w).$$

— Déterminer dimensions et bases de $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.
— Déterminer si T est inversible et calculer la matrice associée à T^{-1} dans les bases canoniques.

Exercice 2. Dans l'ensemble des polynômes $\mathcal{P}_2(t)$ de degré au plus 2, considérons les sousespaces

$$U = \{P \in \mathcal{P}_2(t); P(1) = P(4) = 0\}; \; V = \mathrm{Vect}\{P_1, P_2, P_3\}, \; \textit{où}$$

$$P_1(t) = t^2; \; P_2(t) = 1 + t; \; P_3(t) = -3 - 3t + 2t^2.$$

— Déterminer dimensions et bases de U et V.
— Si, éventuellement, les dimensions de U et V sont inférieures à 3, trouver leurs supplémentaires.

Exercice 3. Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x, y) = (2x, -2y, x + y).$$

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}''$ la base formée par les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1); \; v_2 = (1, 0, 1); \; v_3 = (1, 0, 0).$$

— Calculer les matrices de passage $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ et $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$ de $\mathcal{B} \to \mathcal{B}''$.

Exercice 4. Dans l'ensemble des polynômes $\mathcal{P}_3(t)$ de degré au plus 3, considérons l'application linéaire $L : \mathcal{P}_3(t) \to \mathcal{P}_3(t)$ donnée par, si $P \in \mathcal{P}_3(t)$:

$$P(t) \to tP'(t).$$

— Déterminer dimensions et bases de $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

3

M412

EXAMEN de MATHEMATIQUES, 2019 session 2, Licence 2ème année. ANALYSE. 3 ?

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé pour cette épreuve. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1. 1) Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Montrer que D est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2) On considère la fonction suivante :

$$(x_1, x_2) \in D \to f(x_1, x_2) \quad = \quad \frac{x_1^2 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

Montrer que cette fonction est continue sur D.
3)En utilisant les coordonnées polaires, montrer que f peut s'écrire comme :

$$(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to g(r, \theta) = r^3 \cos\theta^2 \sin\theta^3.$$

4) Déduire de la question 3) que la fonction f admet une limite finie l en $(0,0)$. Quelle est la valeur de l ? Désormais on définit f sur $\mathbb{R}^2$ en posant $f(0,0) = l$.
5) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f sur D. Déduire que f est de classe C^1 sur D.
6)Montrer que les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$. Donner leur valeur.
7)Exprimer les dérivées partielles de f en fonction des coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$.
8) Déduire de la question précedente que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
9) Calculer les dérivées partielles secondes de f sur D.
10) Est ce que les dérivées partielles existent en $(0,0)$? justifier votre réponse.

Exercice 2. On considère la fonction $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x,y) = x^2 y^3$.

1)Soit T le triangle $T = \{O(0,0), A(0,1), C(1,0)\}$. Calculer $\int_R f(x,y)dxdy$.
2) Soit R rectangle suivant : $R = \{O(0,0), A(0,1), B(1,1), C(1,0)\}$. Calculer $\int_R f(x,y)dxdy$.
3) Soit D le disque de $\mathbb{R}^2$ centré à l'origine et de rayon 1 et $D_+ = \{(x,y) \in D, y \geq 0\}$. Calculer $\int_{D+} f(x,y)dxdy$.

Exercice 3. Etudier la nature des points critiques, préciser le cas échéant si il s'agit de d'extrema locaux ou globaux des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to f_1(x_1, x_2) &= x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_1^4}{4} \\
(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to f_2(x_1, x_2) &= x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 \\
(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to f_3(x_1, x_2) &= x_1^4 + x_2^4 - 4(x_1 - x_2)^2
\end{aligned}$$

4