M31 ?

EXAMEN de MATHEMATIQUES, Janvier 2018, Licence 2ème année.
ANALYSE.

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé pour cette épreuve. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1. 1) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application

$$x = (x_1, x_2) \in E \to \|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} \in \mathbb{R}^+$$

est une norme sur E.
2) Rappeler la définition d'un sous ensemble ouvert de $(E, \|.\|)$.
3) On considère $B = \{x = (x_1, x_2) \in E; \|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\ \}$. Montrer que B est ouvert dans $(E, \|.\|)$.
4) Démontrer que B est ouvert dans E pour la norme euclidienne.

Exercice 2 Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ On considère la fonction suivante

$$(x_1, x_2) \in D \to f(x_1, x_2) = \{(0,0)\} \to f(x_1, x_2) = \frac{x_1^5 - x_2^4}{x_1^2 + 4x_2^2}.$$

1) Montrer que cette fonction est continue.

2) Calculer les dérivées partielles en tout point de D.
3) Montrer que f est de classe C^1 sur D. Donner la formule de la différentielle de f en tout point de D.

4) 0n veut désormais étudier cette fonction en $(0,0)$. Montrer qu'il existe un voisinage de $(0,0)$ dans lequel

$$|f(x_1, x_2)| \leq x_1^2 + x_2^2.$$

5) en déduire que f admet 0 comme limite en $(0,0)$.
6) Montrer que les applications partielles $x_1 \in \mathbb{R} \to f(x_1, 0)$ et $x_2 \in \mathbb{R} \to f(0, x_2)$ sont continues et dérivables.
7) Déduire de la question précédente que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Quelle est leur valeur ?
8) Montrer que si on pose $f(0,0) = 0$, la fonction f ainsi définie est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
9) donner le développement limité à l'ordre 1 de f en $(0,0)$.

Exercice 3 On considère la fonction $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to f(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2^2 - x_1^3$.
1) Calculer les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre 2 en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2)Trouver les points critiques de la fonction f
3)Montrer que f admet un maximum local, est-ce que ce maximum est global ?
4)Montrer que f admet un point selle.

1

Exercice 4 Soit $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 > 0, x_2 > x_1, x_1^2 + x_2^2 \leq 4x_1\}$.
1) montrer que dans les coordonnées polaires $D = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 4\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.
2)Calculer alors $I = \int_D dx_1 dx_2 (1 - x_1 - x_2)$.

2

Université de Toulon
EXAMEN
M32 - Algèbre

Juin 2018

On considère deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies munis des bases respectives $\mathcal{B} = (e^1, \dots, e^n)$ et $\widetilde{\mathcal{B}} = (f^1, \dots, f^m)$.

On considère une application linéaire $\ell \in L(F, E)$ de F dans E et on note Q sa matrice dans les bases $\widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}$.

1) Rappeler la définition de la matrice d'une application linéaire. Donner les dimensions de Q. Pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, exprimer $\ell(f^k)$ en fonction de Q et $\mathcal{B}$.

On note K et I le noyau et l'image de ℓ. On introduit aussi un sous espace supplémentaire V de K.

2) Rappeler la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Rappeler à quelles conditions V est un sous espace supplémentaire de K.

On considère un produit scalaire φ sur E et on note M sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

3) Rappeler la définition d'un produit scalaire.

4) Rappeler la définition de la matrice d'une forme bilinéaire. Exprimer $M_{i,j}$ en fonction de φ et $\mathcal{B}$.

5) Rappeler pourquoi M est une matrice diagonalisable. Que peut-on dire des valeurs propres de M ?

On définit ψ sur $F \times F$ en posant $\psi(u, v) = \varphi(\ell(u), \ell(v))$. On note N sa matrice.

6) Montrer que ψ est une forme bilinéaire symétrique et positive.

7) Montrer que $\psi(u, u) = 0$ si et seulement si $u \in K$. A quelle condition sur ℓ, ψ est-il un produit scalaire ?

8) Exprimer $N_{i,j}$ en fonction de ψ et $\widetilde{\mathcal{B}}$. Exprimer ensuite $N_{i,j}$ en fonction de φ, ℓ et $\widetilde{\mathcal{B}}$. Enfin exprimer N en fonction de Q et M.

9) Montrer que V et K sont deux espaces orthogonaux pour la forme ψ.

10) Montrer que la restriction de ψ à $V \times V$ est un produit scalaire sur V.

3

Dans les deux questions suivantes on applique les notations et résultats précédents à des cas particuliers. Néanmoins ces questions peuvent, pour l'essentiel, être traitées indépendamment des questions précédentes.

11) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, que φ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ et que ℓ est définie par $\ell(x, y) := (x + y, x - y, 2x)$. Les bases utilisées sont les bases canoniques.

a) Déterminer M.

b) Déterminer Q.

c) Déterminer K.

d) Déterminer I.

e) Exprimer $\psi(u, u')$ avec $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$.

f) Déterminer N directement et vérifier la formule obtenue à la question 8.

g) Ecrire la forme quadratique Ψ associée à ψ sous forme de somme de carrés indépendants.

h) Déterminer la signature de Ψ. La forme ψ est-elle un produit scalaire ?

12) On suppose dans cette question que $E = F = \mathbb{R}^2$, que φ est définie en posant pour $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$, $\varphi(u, u') := xx' + \frac{xy'+yx'}{2} + yy'$ et que ℓ est définie par $\ell(x, y) := (x - y, 2y - 2x)$. Les bases utilisées sont les bases canoniques.

a) Ecrire la forme quadratique Φ associée à φ sous forme de somme de carrés indépendants. Quelle est la signature de Φ ?

b) Déterminer M.

c) Déterminer Q.

d) Déterminer K.

e) Déterminer I.

f) Donner un supplémentaire V de K.

g) Exprimer $\psi(u, u')$ avec $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$.

h) Déterminer N directement et vérifier la formule obtenue à la question 8.

i) Ecrire la forme quadratique Ψ associée à ψ sous forme de somme de carrés indépendants.

j) Déterminer la signature de Ψ. La forme ψ est-elle un produit scalaire ?

UNIVERSITÉ DE TOULON

PRENOM: --

NOM: --

Filière et groupe: --

LA PRESENTE PAGE DE GARDE COMPORTE L'ÉNONCÉ

ET VOTRE NOM, ELLE EST À RENDRE IMPERATIVEMENT

ANGLAIS

Compréhension ORALE

L2S3 E31 ?

Toutes filières

Durée : **30 minutes**

Epreuve notée sur **20 points**

Aucun document autorisé

5

Listen to this extract about the creation of false memory between Izzie Clarke and crime psychologist and author of *The Memory Illusion*, Julia Shaw from University College London.
(duration of the audio programme : 3 mns 30).

1. Tick the correct answers.

a. False memories

☐ are the results of imagination and real experience
☐ can be based on true facts
☐ relate to a mixture of real memories and other pieces of information
☐ are part of a process in which the brain is confused between reality and dreams
☐ can lead to false convictions

b. False memories are all alike.

☐ right
☐ wrong

Justify from the audio : --

c. Someone can believe they commit a crime although they didn't.

☐ right
☐ wrong

(NO JUSTIFICATION REQUIRED HERE)

d. Julia's study is focused on :

☐ understanding how a crime is likely to happen
☐ showing how people get to confess something they didn't do
☐ pointing out the police might sometimes be responsible for false confessions
☐ interviewing people who assaulted the police when they were teenagers

2. At one point, Julia says, "*if you've got someone on the stand...*" **What exact situation does she refer to?** (You can explain in French) --

----

----

3. Tick the true statements about the people interviewed by Julia:

☐ they were contacted by Julia a long time before the study took place
☐ they attended university
☐ they already had children of their own
☐ they had difficulty in remembering past events
☐ they were aware how emotional such an interview would be
☐ they believed they had committed a crime

4. Translate into French :*'Over twenty minutes they'd build up the sense of"oh, she knows something about my life...'* --

----

----

5. Why exactly does Julia need the participants to trust her in her study? ------------------

----

----

6. Give the exact English translation of these expressions picked up from the audio.

a. *on présente quelqu'un dans un décor :* ---
----
b. *ce à quoi une personne réelle ressemble vraiment :* --
----
c. *une agression avec arme :* --
d. *les preuves sont maigres :* ---
e. *tu comptes sur la mémoire :* ---
f. *poser des questions approfondies*: ---

7. How many false memories did Julia's interview actually include?

☐ one false memory
☐ two false memories
☐ one false memory and two real ones

8. What were the bit(s) of reality that Julia added to make her story-telling more credible? --

UTLN. L2 Maths EXAMEN DE M41, SESSION DE Mai 2018

Durée : 3h

Les notes de cours sont autorisées mais ni les calculettes ni les téléphones portables ne sont autorisés. Barême donné à titre indicatif. Les exercices sont indépendants.

EXERCICE I (4 pts)

Préciser la nature des séries suivantes:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n;\quad \sum_{n\geq 1}\ln(n\sin(\frac{1}{n}));\quad \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n};\quad \sum_{n\geq 1}(1-(\cos(\frac{1}{n^2}))^n.$$

EXERCICE II (4 pts)

1) Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1)$ est convergente

2) En déduire que la suite $s_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$ converge vers un nombre réel appelé constante d'Euler.

EXERCICE III (5 pts)

Soit la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}\cos(nx)}{n^2}$.

1) Montrer que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. Soit s sa somme.

2) La fonction s est-elle continue ?

3) On admet que pour tout réel x, $s(x) = \frac{1}{4}(\frac{\pi^2}{3} - x^2)$. En déduire alors que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE IV (5 pts)

1) Trouver la série entière dont la somme est solution de l'équation différentielle

$$u'(x) + 3u(x) + 9x = 0,\quad u(0) = 2.$$

2) Déterminer son rayon de convergence

3) Prouver que sa somme est donnée par $s(x) = e^{-3x} - 3x + 1$.

EXERCICE V: Valeur approchée de π (5 pts)

1) Rappeler le développement en série entière de $\arctan(x)$ ainsi que son rayon de convergence R.

2) Que dire en $x = R$? (on pourra utiliser le Théorème d'Abel ci-dessous). En déduire une expression de π comme somme d'une série numérique.

3) Dans cette somme, combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de π à $0,01$ près? (on pourra utiliser une estimation du reste d'ordre n)

EXERCICE VI (5 pts)

On pose pour $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + x^2}$.

1) Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Préciser la dérivée F' de F.

3) En déduire l'égalité $\displaystyle -\frac{1}{x^2}\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x(1+x^2)} = \int_0^1 \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2}\,dt,\ \forall x \in]0, +\infty[$.

FIN

Un théorème d'Abel

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. On suppose que la série numérique de terme génóral $a_n R^n$ (resp. $a_n(-R)^n$) converge. Alors

$$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n,\ \text{(resp.}\ \lim_{x\to (-R)^+}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n).$$

8