L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 08 janvier 2016

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique).

Pour étudier la validité d'une hypothèse scientifique H, on la confronte à la théorie déjà admise et on fait plusieurs expériences. On adopte le principe suivant :

Si H ne contredit pas la théorie et si toutes les expériences sont réussies, alors H est validée.

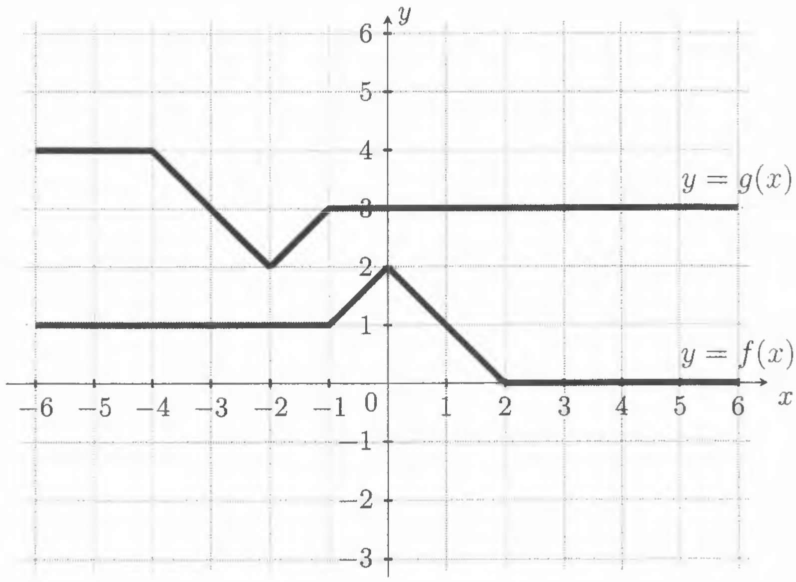
(1) Écrire la négation de la proposition ci-dessus.
(2) Écrire la contraposée de la proposition ci-dessus.
(3) On suppose que toutes les expériences ont réussi et que l'hypothèse H est validée. Peut-on en déduire que H ne contredit pas la théorie ?

Exercice 2 (Tracés de courbes).

Soit les fonctions f et g dont les graphes sont donnés ci-dessous.

(1) Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(a) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(b) $x \mapsto f(x-1) + 1$,
(c) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x) - 3$,
(d) $x \mapsto f(-2x) - 2$.



(2) Exprimer g sous la forme $g(x) = af(bx+c) + d$ en explicitant les valeurs de a, b, c, d.

Exercice 3 (Suite).

On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$ dont on sait que les trois termes u_0, u_2 et u_3 vérifient:

$$\begin{cases} u_0 - 5u_2 + u_3 &= -1 \\ 2u_0 - 7u_2 + 3u_3 &= 5 \\ -u_0 + 2u_2 + 9u_3 &= 5 \end{cases}$$

(1) Calculer les trois réels u_0, u_2 et u_3.
(2) Quelle est la raison de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?
(3) Pour $n \geq 0$ calculer $z_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction).

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = x + \ln\Big((x+1)^2 - 1\Big).$$

(1) Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $D_f =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$, et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f.
Montrer que le signe de $f'(x)$ est identique à celui de $x^2 + 4x + 2$ pour tout $x \in D_f$, et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.

(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$, en $-\infty$, des asymptotes verticales? Si oui, écrire leurs équations.

(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 1$.
Existe-t-il un point (ou plusieurs) sur le graphe de f pour lequel la tangente admet coefficient directeur égal à 2? Si oui, trouver ce(s) point(s).

(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire).

On considère les équations différentielles

$$(A) \qquad y'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$(B) \qquad u'(x) + u(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Ecrire toutes les solutions de l'équation (A).

(2) Déterminer une primitive de xe^{2x}.

(3) Ecrire l'ensemble des solutions de l'équation (B).

(4) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) = xe^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes).

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation

$$2z^2 - z + \frac{1}{2} = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et le module de chacune de ces racines.

(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

I11: Contrôle terminal
Licence 1 MATHS, MIASHS, PC, SI

Programmation Python

Jeudi 7 Janvier 2016 (semestre 1) - Durée : 2h00

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits.
- Le barême est donné à titre indicatif
- Tous les scripts devront être clairement indentés et les noms de variables choisis de façon appropriée (prenez exemple sur le script de l'exercice 3).

Exercice 1. (3 points)

On considère la déclaration de variable suivante:

```
L=[3.14, "qui", 1-2j, (1,2,3), ["10","20","30","40","50"]]
```

Donner le type et la valeur des expressions suivantes:

```
L[2],       L[0]+float(L[-1][0]),    L[4][2]+L[4][3][0],
L[3][:2],   L[1]+str(L[0]),          L[1::2]
```

Exercice 2. (2 pts)

Qu'affichera l'exécution du script suivant?

```
#debut
x=1

def f(x):
    x=x*2
    return x
```

```
#suite
print(f(f(1))
print(f("to"))
y=f(x)
print(x)
print(y)
```

Exercice 3. (3 points)

On considère le script suivant :

```
ch=input("Entrer une phrase : ")
mot=""
list_mot=[]
i=0
while i<len(ch):
    if ch[i]==" ":
        list_mot=list_mot+[mot]
        mot=""
    else:
        mot=mot+ch[i]
    i=i+1
list_mot=list_mot+[mot]
print(list_mot)
```

4

1. Faire une table des valeurs de ce script pour `ch="Like a boss"` sur le modèle suivant

i	i<len(ch)	mot	list_mot	Ecran

2. Que fait le script de manière générale?

Exercice 4. (4 points)

1. Écrire un script qui calcule et affiche la somme alternée des éléments d'une liste d'entiers prédéfinie. Par exemple, pour la liste `[1,2,4,9,2,7]` le script calculera `1-2+4-9+2-7=-11`.

2. Écrire un script qui affiche l'indice du dernier élément non nul d'une liste d'entiers prédéfinie. Par exemple, pour la liste `[0,1,6,0,0,1,0,0,0]` le script affichera 5.

3. On considère la liste prédéfinie `prems=[2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,47,53, 59,67, 71,73,79,83,89,97]`. Écrire un script qui demande un entier `n` à l'utilisateur et crée la liste de tous les entiers plus petits que `n` divisibles par au moins un des nombres de la liste `prems` (inutile de réécrire la définition de la liste `prems` sur votre copie).

Exercice 5. (3 points)

On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier.

1. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui retourne $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

2. Écrire une fonction `binomial(n,k)` qui retourne la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3. Écrire un script qui demande un entier n à l'utilisateur et affiche l'ensemble des coefficients du polynome $(X+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}X + \cdots + \binom{n}{n-1}X^{n+1} + \binom{n}{n}X^n$.

Exercice 6. (5 points)

On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier. Un point du plan sera représenté par un tuple de deux flottants. Notons `P` un tel tuple, ses coordonnées x et y seront donc données respectivement par `P[0]` et `P[1]`. On définie la distance entre deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ par

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

1. Écrire une fonction `Distance(P1,P2)` qui retourne la distance entre les points `P1` et `P2`.

2. On décide de représenter un triangle par une liste de trois points. Écrire une fonction `Perimetre(T)` qui retourne le périmètre du triangle `T`.

3. Écrire une fonction `EstEquilateral(T)` qui retourne `True` si le triangle `T` est équilatéral et `False` sinon.

4. Écrire un script qui recherche dans une liste de triangles quelconques prédéfinie `list_triangle` le triangle équilatéral ayant le plus grand périmètre et l'affiche.

5

Université de Toulon
Licence 1:ère Année SI, MATH & MASS, M12, 7 Janvier 2016

Examen de Statistiques

Avertissement: Durée: 2h. Fiches personnelles et calculettes autorisées.
Barême indicatif: I:4, II:6, III:6, IV:6.

Exercice 1: Moyennes.

1) Deux joueurs de tennis disputent un tournoi. Lors d'un échange, le joueur A lance la balle avec la vitesse v_1, et le joueur B avec la vitesse v_2. Le vent souffle à la vitesse V. On admet que si l'on lance la balle avec une vitesse v dans le sens du vent, sa vitesse absolue est $v + V$, et dans le sens contraire, $v - V$.
a) Pendant la première manche, le joueur A joue dans le sens du vent. Déterminer la durée d'un échange (les joueurs ne se sont pas déplacés), et en dèduire la "vitesse moyenne" u de la balle pendant cet èchange. Comment s'appelle cette moyenne?
b) Pendant la deuxième manche les joueurs permutent le côté du terrain. Calculer de même la "vitesse moyenne" w de la balle pendant un échange. Montrer que

$$u - w = 4V \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$$

2) Lors d'essais de freinage, on fait les relevés des vitesses v d'un véhicule aux temps t:

$$\begin{pmatrix} t: & 0 & 10 & 20 & 25 \\ v: & 190 & 170 & 120 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose que la vitesse varie linéairement sur chacun des intervalles de temps.
a) Tracer le graphe de $t \mapsto v(t)$ et déterminer (i) la vitesse atteinte au bout de 15s, (ii) le temps nécessaire pour atteindre la vitesse de 10km/h.
b) Calculer la distance x_1 parcourue pour $0 \leq t \leq 10$, la distance x_2 parcourue pour $10 \leq t \leq 20$, et la distance x_3 parcourue pour $20 \leq t \leq 25$. (*Rappel*: $dx = v(t)dt$). En déduire la vitesse moyenne pendant les 25s. Comment s'appelle cette moyenne?
c) Retrouver ce résultat en utilisant les centres de classe de la distribution des vitesses.

Exercice 2: Soit $\mathcal{D}_I$ la distribution statistique par classes des salaires en kEUR d'une PME:

$$\begin{pmatrix} I_i: & [0.9, 0.95[& [0.95, 1[& [1; 1.05[& [1.05, 1.1[& [1.1, 1.15[& [1.15, 1.2[& [1.2, 1.25[\\ n_i: & 2 & 5 & 9 & 18 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Tracer l'histogramme des fréquences, et lui superposer le polygône des fréquences.

2) Déterminer la classe modale et la classe médiane de $\mathcal{D}_I$.

3) Calculer la médiane de $\mathcal{D}_I$ par interpolation linéaire de même que le troisième quartile.

4) Calculer la moyenne de $\mathcal{D}_I$.

5) Déterminer l'histogramme des masses de $\mathcal{D}_I$, déterminer la classe médiale et la médiale par interpolation linéaire. Que peut-on dire de la concentration de cette distribution?

6) Calculer l'indice de Gini par la formule $\gamma = \sum_i p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1}$ (comme d'habitude, on rapportera la distribution à celle des centres de classe x_i). Conclusion?

Exercice 3: Distribution d'échantillonnage des moyennes et des écarts. Soient les populations $\mathcal{U}_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $\mathcal{U}_2 = \{-2, -1, 3\}$

1) Déterminer leurs moyennes m_1, m_2 et leurs variances σ_1^2, σ_2^2.

2) On considère la distribution (ou serie statistique) des moyennes μ, soit

$$\mu_i = \frac{1}{2}(x_i + y_i), \quad (x_i, y_i) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$$

La représenter sous la forme d'un tableau:

$$\begin{pmatrix} . & y & -2 & -1 & 3 \\ x & . & . & . & . \\ -2 & . & \bullet & \bullet & \bullet \\ -1 & . & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & . & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & . & \bullet & \bullet & \bullet \\ 2 & . & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Calculer la moyenne $\langle \mu \rangle$ de μ. Conclusion?

3) Calculer la variance $\sigma^2(\mu)$ de μ, et comparer avec $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Pouvez-vous interpréter ce résultat?

4) Mêmes questions pour la série statistique $d = x - y$, de terme général $d_i = x_i - y_i$.

Exercice 4: On considère les notes x et y obtenues respectivement en Maths et en Physique par une promotion d'étudiants.

$$\begin{pmatrix} . & y & [0,5[& [5,10[& [10,15[& [15,20[\\ x & . & . & . & . & . \\ [0,5[& . & 3 & 5 & 4 & 0 \\ [5,10[& . & 3 & 6 & 6 & 2 \\ [10,15[& . & 1 & 4 & 9 & 5 \\ [15,20[& . & 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

On les rapportera à leur centre de classe.

7

1) Déterminer les distributions marginales.

2) Déterminer les distributions conditionnelles. Les variables x et y sont elles indépendantes?

3) Calculer les moyennes marginales $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, les variances marginales $\sigma^2(x)$, $\sigma^2(y)$, et la covariance $\mathrm{Cov}(x, y)$.

4) Quelle est l'équation de la droite de régression de y par rapport à x? de la droite de régression de y par rapport à x?

5) Soient a et a' les pentes de ces deux droites, montrer en general que $|aa'| \leq 1$, et calculer aa'.

8

Université de Toulon
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques *2015/2016*

Maths L1

MS22- Examen session 1
19 mai 2016

Question de cours :

Soient E et F deux espaces vectoriels.
Soit f une application linéaire de E dans F.
1) Démontrer que le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E et que l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.
2) En supposant que E et F sont de dimension finie, énoncer le théorème du rang pour f.
3) En supposant de plus que les dimensions de E et F sont égales, quelles sont les conséquences du théorème du rang pour f ?

Exercice 1

Soient a, b, c trois nombres réels distincts.
Soit P le polynôme en X défini, pour trois nombres réels donnés x, y, z, par
$P(X) = X^3 + xX^2 + yX + z$.
1) Montrer que, si (x, y, z) est solution du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} z + ay + a^2x + a^3 = 0 \\ z + by + b^2x + b^3 = 0 \\ z + cy + c^2x + c^3 = 0 \end{cases}$$

alors $P(X)$ est divisible par le polynôme $(X - a)(X - b)(X - c)$.
2) En déduire la solution du système.
3) Retrouver cette solution par une méthode directe.

Exercice 2

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal a 2.
Soit ϕ l'application de E dans E définie par : $\phi(P)= X^2P'' - XP'$.
1) Donner une base $\mathcal{B}$ de E.
2) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
3) Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
4) Déterminer une base du noyau de ϕ.
5) Déterminer une base de l'image de ϕ.

Exercice 3

Soit $E = \mathbf{R}^4$, muni de sa base canonique $\mathcal{C}_4$.
Soit F le sous-espace vectoriel de E défini par :
$F = \{(x, y, z, t) \in E / x - z + t = 0\}$
Soit f l'application de E dans E définie par :
$f(x, y, z, t) = (5x - 4z + 2t, -4x + y + 4z - 2t, 7x - 6z + 3t, 2x - 2z + t)$.
1) Soient $u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 1, 0, 0), u_3 = (-1, 1, -2, -1)$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de F . Quelle est la dimension de F ?
2) Montrer que f est un endomorphisme de E.
3) Montrer que $Ker(f) = Vect(u_4)$, où $u_4 = (0, 0, 1, 2)$.
4) Calculer le rang de f .
5) En déduire que $Im(f) = F$.
6) A-t-on $Ker(f) \oplus Im(f) = E$?
7) Soit g l'application de F dans F définie par $g(x) = f(x)\ \forall x \in F$.
Donner la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.
8) g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier.
9) Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.
Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
Donner la matrice de f dans cette base.
10) Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}_4$ vers la base $\mathcal{B}'$.
P est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse P^{-1}.
11) On note A (respectivement A') la matrice de f dans $\mathcal{C}_4$ (respectivement dans $\mathcal{B}'$).
Sans calculs, donner la relation entre A', A et P.

Exercice 4

Calculer le déterminant d'ordre n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a & b & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & a & b \\ b & 0 & . & . & 0 & a \end{vmatrix}$$

Université de TOULON
UFR Sciences et Techniques
L1 Math-PC, M23

Année Universitaire 15-16

MECANIQUE STATIQUE - MODULE
Examen de Mai 2016

L'utilisation des calculatrices est interdite.

Les deux exercices proposés sont indépendants

Exercice 1 : Etude d'un équilibre

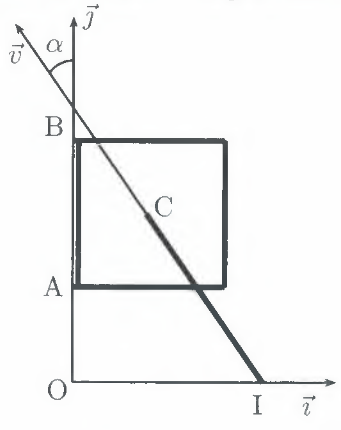
Relativement au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (avec $\vec{\jmath}$ vertical ascendant), $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère un système Σ, situé dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, constitué de deux solides homogènes :

- Une tige $\mathcal{B}$ de masse m de longueur ℓ, d'extrémités C et I et de centre G.
- Une plaque carrée $\mathcal{S}$ de même masse m, de coté a, et de centre C.

La position de la barre $\mathcal{B}$ est définie par le vecteur unitaire v tel $\overrightarrow{IC} = \ell\vec{v}$, on introduit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit une base orthonormée directe et on désigne par α l'angle $(\vec{\imath}, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{k}$.
La barre $\mathcal{B}$ est astreinte à rester en contact au point I avec l'axe $O\vec{\imath}$. Ce contact obéit à une loi de Coulomb de coefficient f et on note $T\vec{\imath} + N\vec{\jmath}$ la réaction du sol au point I.

La plaque S, quant à elle, reste en contact sans frottement avec l'axe $O\vec{\jmath}$ aux points A et B. On note $R_a\vec{\imath}$ et $R_b\vec{\imath}$ les réactions aux points A et B.

La barre et la plaque sont en liaison sphérique au point C et on suppose que la plaque exerce sur la barre un couple $-m\,\ell g\,\cos\alpha\,\vec{k}$



1. Rappeler la condition d'équilibre d'un solide et la condition d'équilibre d'un système de solides.
2. Ecrire au point C le torseur des efforts qui s'exercent sur la barre $\mathcal{B}$, sur la plaque $\mathcal{S}$ et sur le système.
3. Ecrire les équations d'équilibre du système Σ.
4. Calculer N et T en fonction de α.
5. Montrer que $R_a - R_b = -\dfrac{2m\ell g}{2a}\cos\alpha$. En déduire R_a et R_b en fonction de α.
6. Rappeler la loi de Coulomb et donner une condition sur le coefficient de frottement f pour qu'un équilibre soit possible

7. Montrer que lorsque le contact en I a lieu sans frottement, on a $sin\alpha = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$

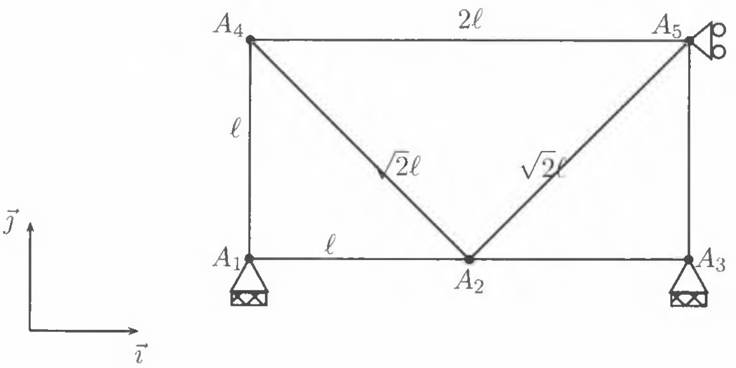
Exercice 2 : Etude d'un treillis

Dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le treillis élastique plan schématisé ci-dessous. Toutes les barres ont la même section S. **Le module d'Young des barres A_2A_4 et A_2A_5 est égal à $\sqrt{2}\,E$**, tandis que celui de toutes les autres barres est égal à E.

Les noeuds A_1 et A_3 sont en appui fixe, le noeudA_5 est mobile dans la direction $\vec{\jmath}$ et les noeuds A_2 et A_4 sont mobiles.

Les barres A_2A_4 et A_2A_5 sont de longueur $\sqrt{2}\ell$.
Toutes les autres barres sont de longueur ℓ.

Une charge $-\frac{5}{2}F\,\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_2, une charge $-F\vec{\imath}$ est appliquée au noeud A_4 et une charge $2F\,\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_5.



On note T_{ij} la tension qui règne dans la barre A_iA_j. Dans cet exercice on ne cherchera pas à calculer les réactions aux appuis.

1. Donner le degré de staticité du treillis (justifier la réponse).
2. Rappeler la définition du système cinématique. Ecrire les équations du système cinématique et exprimer les déplacements aux noeuds en fonction des allongements relatifs des barres.
3. Montrer que $T_{23} = -T_{12}$ et $+2T_{12} + 2T_{45} + T_{14} - 3T_{35} + \sqrt{2}T_{25} = \sqrt{2}T_{24}$

   Comment s'appelle ces relations. A quoi servent-elles ?
4. Rappeler la définition du système statique. En écrire les équations. En déduire les tensions dans les barres. Préciser pour chacune d'entre elles si elles sont en traction ou en compression.
5. Exprimer alors les déplacements des noeuds en fonction de F, ℓ, E et S.