1

Université de Toulon

Licence 2 MIASHS. Vendredi 19 mai 2015.

MS42

Examen de Statistiques Inférentielles

Avertissement: Barême donné à titre indicatif: I(3). II(6). III(8). IV(4).

Exercice 1 [3]: Soient les populations $\mathcal{U}_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $\mathcal{U}_2 = \{-1, -2, 3\}$.

1) Déterminer leurs moyennes m_1, m_2 et leurs variances σ_1^2, σ_2^2.

2) On considère la distribution des moyennes $\frac{x+y}{2}$, $(x, y) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. Calculer la moyenne et la variance de la distribution des moyennes. Conclusion?

3) Déterminer de même la moyenne et la variance des distributions des différences $x - y$. Conclusion?

Exercice 2: Soit $\theta > 0$. On considre n variables aléatoires i.i.d. $X_1, \cdots, X_n$ suivant la loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta}\exp[-\frac{x^2}{2\theta}]1_{x>0}$$

1) Montrer que $\mathrm{E}(X^2) = 2\theta$. [On pourra calculer $I(\theta) = \int_0^\infty xe^{-x^2/2\theta}\,dx$ directement, puis en intégrant par parties, avec $u'(x) = x, v(x) = e^{-x^2/2\theta}$].

2) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de l'échantillon $X_1, \cdots, X_n$? [On vérifiera qu'il s'agit bien d'un maximum en calculant $\frac{\partial^2 L_x}{\partial\theta^2}$].

3) Calculer l'espérance de $\widehat{\theta}_n$ et en déduire que $\widehat{\theta}_n$ est sans biais.

4) Vérifier si $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur efficace, en utilisant la borne de Cramer-Rao sous la forme

$$\sigma^2(T) \geq \frac{1}{I(\theta)}, \quad I(\theta) = \mathrm{E}_\theta[-\frac{\partial^2 \log f_\theta}{\partial\theta^2}]$$

Exercice 3: On veut étudier la durée de vie de lampes halogènes du type A. Leur durée de vie suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1) Les paramètres μ et σ étant inconnus, on prélève un échantillon de 15 lampes A et on obtient une durée de vie moyenne $m = 2100$h avec une variance empirique corrigée $S^2 = 14400$h

a) Déterminer un intervalle de confiance de $\mu = 2050h$ au risque $\alpha = 5\%$.

b) Déterminer un intervalle de confiance de $\sigma^2 = 40000$ au risque $\alpha = 5\%$.

2) On modifie les lampes de type A pour augmenter leur durée de vie, ce qui donne les lampes de type B B. On prélève un échantillon $n_A = n_B = 60$ et on observe $m_A = 2040$h, $S_A = 180$h, tandis que $m_B = 2120$h et $S_B = 150$h.

a) Tester l'hypothèse H_0: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ contre H_1: $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ au risque $\alpha = 5\%$.

b) Peut on considérer que les 2 types de lampes ont une durée de vie équivalente au risque de 5%? (test de différences).

Exercice 4:

1) Une liste de 200 bits (0 ou 1) aléatoires donne 110 chiffres "0" et 90 chiffres "1". Tester si le générateur est non biaisé au risque de 2.5%

(i) Au moyen d'un test de fréquences et de l'approximation par la loi normale.

(ii) Au moyen du test du χ^2 et de l'approximation par la loi $\chi^2(1)$.

2) Une liste de 250 chiffres aléatoires entre 0 et 9 donne la distribution suivante:

chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquence observée	17	31	29	18	14	20	35	30	20	36

Au moyen du test du χ^2, tester si le générateur est non biaisé au risque: (i) de 2.5%; (ii) de 1%