1

I11: Contrôle terminal
Licence 1 MATHS, MIASHS, ~~PC~~, SI

Programmation Python

Jeudi 7 Janvier 2016 (semestre 1) - Durée : 2h00

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits.
- Le barème est donné à titre indicatif
- Tous les scripts devront être clairement indentés et les noms de variables choisis de façon appropriée (prenez exemple sur le script de l'exercice 3).

EXERCICE 1. (3 points)

On considère la déclaration de variable suivante:

```
L=[3.14, "qui", 1-2j, (1,2,3), ["10","20","30","40","50"]]
```

Donner le type et la valeur des expressions suivantes:

```
L[2],        L[0]+float(L[-1][0]),     L[4][2]+L[4][3][0],
L[3][:2],    L[1]+str(L[0]),           L[1::2]
```

EXERCICE 2. (2 pts)

Qu'affichera l'exécution du script suivant?

```
#debut
x=1

def f(x):
   x=x*2
   return x
```

```
#suite
print(f(f(1))
print(f("to"))
y=f(x)
print(x)
print(y)
```

EXERCICE 3. (3 points)

On considère le script suivant :

```
ch=input("Entrer une phrase : ")
mot=""
list_mot=[]
i=0
while i<len(ch):
   if ch[i]==" ":
      list_mot=list_mot+[mot]
      mot=""
   else:
      mot=mot+ch[i]
   i=i+1
list_mot=list_mot+[mot]
print(list_mot)
```

1. Faire une table des valeurs de ce script pour `ch="Like a boss"` sur le modèle suivant

i	i<len(ch)	mot	list_mot	Ecran

2. Que fait le script de manière générale?

Exercice 4. (4 points)

1. Écrire un script qui calcule et affiche la somme alternée des éléments d'une liste d'entiers prédéfinie. Par exemple, pour la liste `[1,2,4,9,2,7]` le script calculera `1-2+4-9+2-7=-11`.
2. Écrire un script qui affiche l'indice du dernier élément non nul d'une liste d'entiers prédéfinie. Par exemple, pour la liste `[0,1,6,0,0,1,0,0,0]` le script affichera 5.
3. On considère la liste prédéfinie `prems=[2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,47,53, 59,67, 71,73,79,83,89,97]`. Écrire un script qui demande un entier `n` à l'utilisateur et crée la liste de tous les entiers plus petits que `n` divisibles par au moins un des nombres de la liste `prems` (inutile de réécrire la définition de la liste `prems` sur votre copie).

Exercice 5. (3 points)
On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier.

1. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui retourne $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.
2. Écrire une fonction `binomial(n,k)` qui retourne la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
3. Écrire un script qui demande un entier n à l'utilisateur et affiche l'ensemble des coefficients du polynome $(X+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}X + \cdots + \binom{n}{n-1}X^{n+1} + \binom{n}{n}X^n$.

Exercice 6. (5 points)
On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier. Un point du plan sera représenté par un tuple de deux flottants. Notons `P` un tel tuple, ses coordonnées x et y seront donc données respectivement par `P[0]` et `P[1]`. On définie la distance entre deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ par

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

1. Écrire une fonction `Distance(P1,P2)` qui retourne la distance entre les points `P1` et `P2`.
2. On décide de représenter un triangle par une liste de trois points. Écrire une fonction `Perimetre(T)` qui retourne le périmètre du triangle `T`.
3. Écrire une fonction `EstEquilateral(T)` qui retourne `True` si le triangle `T` est équilatéral et `False` sinon.
4. Écrire un script qui recherche dans une liste de triangles quelconques prédéfinie `list_triangle` le triangle équilatéral ayant le plus grand périmètre et l'affiche.

SESSION1-2016, Licence MIASHS/SI 1ère année.
Analyse - MS21 -

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé pour cette épreuve. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice I.

1) Soit f une fonction définie de $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappeler les conditions sur f pour pouvoir lui appliquer la formule de Taylor en un point $x \in D$. Donner la formule de Taylor à l'ordre 4 de f en un point $x_0 \in D$.
2) Supposons $f(x) = \cos x$. Donner le DL de f à l'ordre 4 en $x_0 = 0$.
3) Déduire la limite suivante:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Est ce utile d'avoir un DL à l'ordre 4 pour répondre à cette question?
4) Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}.$$

5) Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^4 \ln(\cos(1/x)) + x^2 = \lim_{u \to 0+} \frac{2\ln(\cos(u)) + u^2}{u^4}$$

Puis calculer cette limite (on utilisera un DL approprié de $\ln(\cos(u))$ en $u = 0$).

Exercice II.

1) On considère la série de terme général, $t_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}, n \geq 0$. Quelles sont les sommes partielles de la série de terme général t_n? Démontrer alors que série cette diverge.
2) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^2}{(1+n^2)^2}; n \geq 1$.
3) Déduire de 2) que la série $v_n = \frac{\cos(n)n^2}{(1+n^2)^2}; n \geq 1$ est absolument convergente. Est elle convergente?
4)Rappeler le critère de convergence de d'Alembert.
5-a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty}(1 - 1/n)^n = \frac{1}{e}$.
5-b) Appliquer le critère de d'Alambert pour montrer que la série de terme général,

$$w_n = \frac{2.4.6...(2n)}{n^n}; n \geq 1$$

est convergente.

Exercice III.

On voudrait déterminer la valeur de l'intégrale généralisée suivante.

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)dx, \text{ avec } f(x) = \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$$

1) Soit $R > 0$. En utilisant le changement de variable $u = e^x$, calculer $I(R) = \int_0^R f(x)dx$,
2) Déduire la valeur de I.
3) Soit $\alpha, \beta > 0$. On considère pour $0 < a < b \leq +\infty$,

$$I_{a,b} = \int_a^b f(x)dx, \text{ avec } f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}.$$

3-a) On suppose d'abord que $a = 0$ et $b < +\infty$. Discuter suivant les valeurs de α et β la nature de $I_{a,b}$.
3-b) On suppose maintenant que $a > 0$ et $b = +\infty$. Montrer que si $\beta > 2$, $I_{a,b}$ est convergente.
3-c) existent-ils des valeurs de α, β pour lesquelles $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente?

(5)

SESSION1-2016, Licence MIASHS 1ère année.
Analyse - MS 21 -

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé pour cette épreuve. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction suivante

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3xy$$

1) Montrer que cette fonction est bien définie et continue.

2) Montrer que f admet des dérivées partielles premières continues.

3) Quels sont les points critiques de f?

4) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

5) Quelle est la valeur du Hessien en ce point?

6) A l'aide de la question 5) montrer que 0 est un minimum locale de f

6) Montrer que en fait 0 est un minimum global pour la fonction f.

7) Montrer que la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 3xy$ n'admet pas d'extremum.