M32 ?

EXAMEN de MATHEMATIQUES, Juin 2015, Licence 2ème année.
ALGEBRE LINEAIRE.

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé pour cette épreuve. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 On considére la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

1) On note par ϕ_q la forme bilinéaire associée à q. Donner l'expression de ϕ_q, donner ensuite sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3) En utilisant la méthode de Gauss, écrire q sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}^3$

$$q(x) = \alpha_1\big(\varphi_1(x)\big)^2 + \alpha_2\big(\varphi_2(x)\big)^2 + \alpha_3\big(\varphi_3(x)\big)^2$$

ou $\alpha_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}$ et $\varphi_{i=1,2,3}$ sont des formes linéaires indépendantes. Quel est le type de la forme quadratique q?
4) Construire dans $\mathbb{R}^3$ la base duale de $\varphi_{i=1,2,3}$.
5) Comment s'exprime la forme quadratique q dans cette nouvelle base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 1) Montrer que $\mathbb{R}^3$ muni de la forme quadratique:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

est un espace euclidien. Quel est le produit scalaire ? On note par E cet espace euclidien.
2) A partir de la base canonique de $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$, en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire une base de E q-orthonormale.
3) Soit F, le sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendrés par $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$.
3-a) On considère d'abord $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, on note par F' l'orthogonal de F dans cet espace. Déterminer F'.
3-b) Déterminer ensuite le sous espace q-orthogonal de F, $F^\perp$. Est ce que les sous espaces F' et $F^\perp$ sont identiques? Justifier votre réponse

Exercice 3 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique que l'on note $\mathbb{R}^3_u$, Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x) = (x_1 + 2x_3, x_2 + x_3, 2x_1 + x_2) \quad (e)$$

1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3_u$.
2) On considère l'espace euclidien E de l'exercice 3 et h l'endomorphisme sur E défini par l'expression *(e)*. Est-il symétrique?
3) Diagonaliser l'endomorphisme f: construire une base orthonormale de $\mathbb{R}^3_u$ formée de vecteurs propres de f.

M32 bis ?

EXAMEN de MATHEMATIQUES, décembre 2014, Licence 2ème année.
ALGEBRE BILINEAIRE.

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés pour cette épreuve. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 On considère dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique, la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{u_1 = (1,0,1,0)); \; u_2 = (0,1,0,1); \; u_3 = (0,0,1,1); u_4 = (1,0,0,1)\}$
1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E
2) construire la base duale de $\mathcal{F}$ dans l'espace dual E^*
3) Soit $F := vect\{u_1, \; u_3, \; u_4\}$. Comment définit-on $F^\perp$ dans E^* monter que $F^\perp$ est un sous espace de E^*? Quelle est la dimension de $F^\perp$?
4) Donner un systéme d'équations du sous espace vectoriel F.

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On considére l'endomorphisme f sur E défini par sa matrice associée relativement à la base canonique, $\mathcal{B}_c$:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Expliquer pourquoi f est diagonalisable.
2) montrer que $ker(f)$ est de dimension 2, et donner une base de $ker(f)$.
3) Montrer que f admet une valeur propre simple non nulle et donner un vecteur propre correspondant.
4) Construire une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f que l'on notera par $\mathcal{B}$
5) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{B}$, ainsi que P^{-1}.

Exercice 3. On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$$

1)Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.

2) Donner la matrice de φ dans la base canonique. Quelle est la forme quadratique qui est associée à φ?
3)Donner le rang ainsi que le noyau de φ.
4) En utilisant le procédé de réduction de Gauss, écrire q sous la forme d'une somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

5) donner une base $q-$orthogonale.

Exercice 4. On considére la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\forall(x_1, x_2, x_3) \in E$,

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2.$$

1)Montrer que $E = (\mathbb{R}^3, Q)$ est un espace euclidien. Préciser le produit scalaire.
2) Soit $D = vect\{(1,0,0)\}$. Construire le sous espace $D^{\perp}$.
3) Vérifier *par le calcul* que $E = D \oplus D^{\perp}$.
4) Donner une base orthonormale de $D^{\perp}$
5) Construire la projection orthogonale sur $D^{\perp}$.

L2 Informatique - Algorithmique - Session 1

131 ?

mardi 16 décembre 2014. 09h00-11h00. A 400.

La précision et la clarté de votre rédaction sont *fondamentales*. Documents interdits. Durée 2h00. Le barème indiqué est *approximatif*.

Exercice 1. [2pts] Quelle est la valeur de la somme des entiers compris entre 39 et 78 ? Soit n un entier strictement positif, calculez la somme

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i.$$

Exercice 2. [4pts] Dessinez l'arbre binaire de décision du tri par sélection par le minimum pour les instances de taille 3. Les branches droites correspondent aux comparaisons qui sont satisfaites, les feuilles doivent contenir la liste avant le tri. De manière plus générale, combien de feuilles y-a-t-il au minimum dans l'arbre de décision associé à un algorithme de tri pour une instance de taille n ?

Exercice 3. [2pts] Écrivez un algorithme `MinMax(L):entier` qui renvoie le *premier* indice du terme le plus petit de la liste L ainsi que le *dernier* indice du terme le plus grand de la liste L. Par exemple pour la liste $[2, 1, 4, 3, 7, 9, 2, 1, 9, 3]$, l'algorithme renvoie les valeurs 2 et 9 (on suppose ici que l'indexation commence par 1). On veut que l'algorithme trouve ces deux indices *en une seule passe* sur la liste. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Exercice 4. [2.5pts] Écrivez l'expression arithmétique suivante sous forme postfixée :

$$(2+3)\times(7-1)+2$$

Évaluez cette expression à l'aide d'une pile. On rappelle qu'on lit les termes de l'expression postfixée et que, selon qu'il s'agisse d'un opérande x ou d'un opérateur $\star$, on empile x ou on dépile les deux valeurs a et b au sommet de la pile et on empile $a \star b$.

Faites un tableau contenant les différents états de la pile au fur et à mesure de l'évaluation de l'expression postfixée que vous aurez trouvée. Quel est le résultat final dans la pile ?

Exercice 5. [6pts] Soient u et v deux séquences de valeurs dans un ensemble E de longueurs respectives n et m avec $n \leq m$. On dit que u est une *sous-séquence* de v s'il existe une application strictement croissante $\sigma : [1;n] \to [1;m]$ telle que $\forall i \in [1;n]$, $u_i = v_{\sigma(i)}$. Par exemple le mot "cas" est une sous-séquence du mot "carnages" (ou encore "carnages"), ainsi que le mot "rage" ("carnages"). La séquence vide est toujours considérée comme une sous-séquence de n'importe quelle séquence.

En supposant que la séquence v est constituée de n valeurs distinctes, combien peut-on construire de sous-séquences u de v ?

Écrivez un algorithme `EstSousSeq(u,v):booleen` qui renvoie `vrai` si u est une sous-séquence de v et `faux` sinon. On notera $u[i]$ le i-ème terme de la séquence u. Estimez la complexité de cet algorithme dans le meilleur des cas et dans le pire des cas en fonction des longueurs n et m des séquences u et v.

Exercice 6. [6pts] Écrivez un algorithme `Dichotomie(L,x):entier` qui recherche la valeur x dans une liste L supposée triée dans l'ordre croissant avec la méthode de la dichotomie. On supposera que la liste est indexée à partir de 1 et que $\sharp L$ désigne le nombre de termes de la liste. L'algorithme devra renvoyer le premier indice de x où x apparaît dans la liste L ou 0 si x n'apparaît pas dans la liste L.

Estimez la complexité de votre algorithme.

> **Rappel important !** pour toutes les questions de complexité, précisez :
> (1) ce que désigne la/les variable(s) de la fonction de complexité T ;
> (2) quelles instructions vous comptabilisez et pourquoi vous les considérez représentatives de l'algorithme ;
> (3) s'il y a lieu de distinguer différentes complexités, meilleur des cas, pire des cas (le cas échéant, le complexité moyenne n'est pas demandée).

UNIVERSITE DU SUD TOULON VAR
UFR SCIENCES ET TECHNIQUES
L2 MATHSP-L2 PC- L2 SI

SESSION 1 2014-2015

EXAMEN DE P311

COURS, TD et DOCUMENTS INTERDITS

CALCULATRICES AUTORISEES

PORTABLES STRICTEMENT ETEINTS

DUREE 1h30

EXERCICE 1 *(7points)*

Une charge q est placée en un point O d'un axe x'Ox orienté par un vecteur unitaire $\vec{i}$.
Elle crée en un point A d'abscisse $x_A > 0$ un champ électrique $\vec{E_A} = E_A\ \vec{i}$ (avec $E_A > 0$) et en un point B d'abscisse x_B un champ électrique $\vec{E_B} = -\frac{4}{9} E_A\ \vec{i}$.

1) Quel est le signe de la charge q ?
2) Déterminer l'expression algébrique de x_B en fonction de x_A.
3) Quelle relation y a-t'il entre les potentiels V_A et V_B créés par la charge q aux points A et B ?
4) On mesure au point A le champ électrique $E_A = 11{,}25\ 10^4\ V.m^{-1}$ et le potentiel $V_A = 2250$ V. Calculer les valeurs de x_A, de q et x_B.
5) On place au point B une charge q'. Quel doit être le signe de q' pour que le potentiel électrique créé en A par q et q' soit nul? Calculer la valeur de q'.
6) Calculer alors la valeur et le sens du champ électrique total créé en A par q et q'.
7) Calculer la force exercée par q sur q', en précisant sa nature (répulsive ou attractive) et montrer qu'on peut aussi retrouver la valeur de $\vec{E_B}$.

Rappel : $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\,10^9$ *USI*

EXERCICE 2 *(8 points)*

Une sphère de centre O et de rayon a porte la charge volumique uniforme ρ.

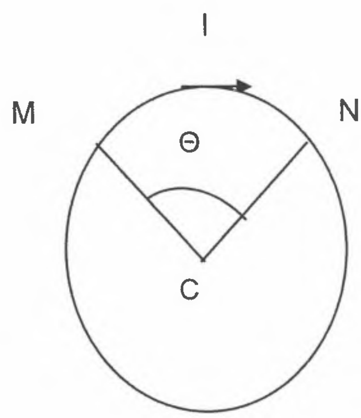
1) Etablir par considérations de symétries, la direction de $\vec{E}$ et la surface de Gauss (Σ) à choisir pour calculer son module à la distance r de O. Déterminer, en explicitant les calculs , l'expression du flux de $\vec{E}$ à travers (Σ).Que vaut ce flux selon le théorème de Gauss ?
2) Déterminer l'expression de $\vec{E}$ en tout point de l'espace, en fonction de la valeur E_a qu'il prend à la surface de la sphère.
3) Calculer, en fonction de E_a, le potentiel V à la distance r quelconque de O. On précisera, en justifiant le raisonnement, quelle origine sera prise pour le potentiel.
4) Exprimer V en fonction de sa valeur V_a à la surface de la sphère.

EXERCICE 3 *(5 points)*

On considère une portion MN de spire circulaire de centre C, de rayon R, parcourue par un courant continu d'intensité I. La portion MN est vue sous l'angle θ depuis C (voir figure)

On rappelle le postulat de Biot et Savart $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$

1) En utilisant la loi de Biot et Savart, calculer les caractéristiques (module, direction et sens) du champ magnétique $\overrightarrow{B_\theta}$ créé en C, par la portion MN de la spire . Préciser sur un schéma la direction et le sens de $\overrightarrow{B_\theta}$ (C).
2) En déduire l'expression de $\overrightarrow{B}$ (C) créé par la totalité de la spire en C.



UTLN. L2 Maths EXAMEN DE M41, SESSION DE Juin 2015

Durée : 2h

Aucun document ni calculette n'est autorisé, les exercices sont indépendants.

EXERCICE I

1) Rappeler le critère de Cauchy pour les séries

2) Montrer les inégalités

$$\ln(1+\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

Indication: on pourra remarquer que $\ln(1+\frac{1}{n}) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t}$.

3) Utiliser (1) et le critère de Cauchy pour montrer que la série $\sum_n \ln(1+\frac{1}{n})$ est divergente

4) Retrouver le résultat du 3) en utilisant (1) et le théorème de comparaison

5) Quelle est la nature de la série $\sum_n \frac{2n^2+n}{\sqrt{n^7+1}}$?

EXERCICE II

1) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$,

$$0 \leq |\ln x| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

(On pourra regarder le maximum de la fonction $-\ln x - \frac{2}{\sqrt{x}}$)

2) montrer que pour tout $a > 0$, les intégrales généralisées

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{a^2+x^2}\, dx, \text{et } \int_1^\infty \frac{\ln x}{a^2+x^2}\, dx$$

convergent

3) En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, montrer que $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = 0$

4) En déduire grâce à un autre changement de variable que

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{a^2+x^2}\, dx = \frac{\pi \ln a}{2a}$$

EXERCICE III

Soit f une fonction positive et décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. On suppose que l'intégrale $\int_1^\infty f(t)\, dt$ est divergente. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose:

$$I_n = \int_1^n f(t)dt, \ S_n = \sum_{k=1}^n f(k), \ W_n = (S_n - I_n)_{n\geq 1}.$$

1) Montrer que la suite $(W_n)_n$ est décroissante et minorée

2) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{S_n} = 1$$

3) Donner des équivalents pour $n \to \infty$ des sommes

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; \ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}, \ (0<\alpha<1); \ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Université de Toulon

Licence L2 Math. M43. 2 Juillet 2015

Examen de Probabilités, 2:ième session

Avertissement: Durée: 2h. Les documents personnels et les calculettes sont autorisés. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 [4pts]: 7 amis comparent le jour de la semaine de leur anniversaire en 2015: l'anniversaire peut tomber un Lundi, un Mardi, etc... Les 7 jours sont équiprobables.

1) Soit A l'événement: "au moins 2 d'entre eux sont nés le même jour". Calculer $\mathrm{P}(A)$.

2) Soit B l'événement: "au plus 2 d'entre eux sont nés un jour différent". Calculer $\mathrm{P}(B)$.

3) Soit C l'événement: "au moins 2 d'entre eux sont nés un jour différent". Calculer $\mathrm{P}(C)$.

Exercice 2 [5pts] Une compagnie aérienne remarque qu'en moyenne 5% des réservations sur un vol donné ne sont pas utilisées. Elle vend 84 billets ("sur-réservation"). Soit X le nombre de désistements, X suit donc une loi binômiale $B(84; 0.05)$

1) Il n'y a que 81 places sur ce vol. Calculer la probabilité que tous les passagers soient admis.

2) Admettant que l'on peut approximer la loi binômiale $B(n, p_n)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_n)$ avec $\lambda_n = np_n$ lorsque $n \geq 30$, $p_n \leq 0.1$, $np_n \leq 15$, donner une valeur approchée de $\mathrm{P}(X = j)$, $j = 0, 1, 2$ et de $\mathrm{P}(X \geq 3)$.

3) Chaque billet est vendu 100EUR. La compagnie doit non seulement rembourser, mais verser une pénalité de 100EUR à tout client qu'elle aurait refusé à bord du vol en sur-réservation. Toujours dans l'approximation par loi de Poisson, quelle est l'espérance de gain supplémentaire de la compagnie par ce procédé ?

Exercice 3 [4pts] On lance 2 des non pipés.

1) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double, sachant que la somme des points est égale à 8 ?

2) Même question sachant que la somme des points est au moins égale à 10.

Exercice 4 [5pts] Trois urnes $U_1, U_2 U_3$ contiennent respectivement:

(1) 2 boules rouges (R) et 3 boules bleues (B).

(2) 4 boules rouges et 5 boules bleues.

(3) 3 boules bleues.

On prélève une boule dans U_1 qu'on met dans U_2, puis une boule dans U_2 qu'on met dans U_3, et enfin une boule dans U_3 qu'on met dans U_1.

a) Quelle est la probabilité que la composition de l'urne U_1 n'ait pas varié?

b) Quelle est la probabilité que la composition d'aucune des urnes n'ait varié?

c) *Question bonus*: On considère n urnes contenant des boules R et B en proportions données, et on effectue les substitutions ci-dessus. Pour $j = 1, 2, \cdots, n-1$, soit X_j la variable aléatoire définie par $X_j = 0$ si la boule prélevée de l'urne j est R, et $X_j = 1$ dans le cas contraire. On pose aussi $Y_j = X_j$ pour $j = 1, 2, \cdots, n-1$ et $Y_n = X_n - X_1$. Ecrire une formule générale donnant $\mathrm{P}(Y_n = 0)$ au moyen de $\mathrm{P}(Y_1 = a_1)$ et des probabilités de transition $\mathrm{P}(Y_k = a_k | Y_{k-1} = a_{k-1})$, $k = 2, \cdots, n$, avec $a_j \in \{0, 1\}$ [on commencera par décomposer l'évènement $Y_n = 0$ en $X_n = X_1 = 0$ et $X_n = X_1 = 1$, puis simplifier les expressions telles que $\mathrm{P}(X_n = 0 | X_{n-1} = a_{n-1} \cap \cdots \cap X_2 = a_2 \cap X_1 = a_1)$].

Exercice 5 [4 pts]: Une urne contient 4 jetons numerotés de 1 a 4. On effectue 2 tirages, les variables aléatoires donnant le numéro du jeton étant notées X_1 et X_2 respectivement.

1) Pour des tirages avec ou sans remise, déterminer les lois du couple (X_1, X_2), et leurs lois marginales. Conclusion?

2) Pour des tirages avec ou sans remise, déterminer la loi de $X = X_1 + X_2$,

3) Calculer $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$, et $\sigma^2(X_1 + X_2)$.