L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Si Mathématiques M11

Examen du jeudi 8 janvier 2015

Tous documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 (Logique). En mathématiques, le principe des tiroirs peut être énoncé ainsi :

Si le nombre de tiroirs de rangement est strictement inférieur au nombre de chaussettes et si on range toutes les chaussettes dans les tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

(1) Soit P, Q et R trois propositions logiques. Écrire la négation de la proposition

$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

(2) Écrire la négation de la proposition :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq 2$$

(3) Écrire la négation du principe des tiroirs.

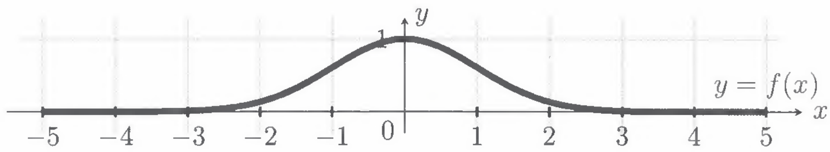
(4) Écrire la contraposée du principe des tiroirs.

Exercice 2 (Transformations sur le graphe). On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ dont le graphe est rappelé ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto -f(x) - 1$,

(2) $x \mapsto f(x-3) - 1$,

(3) $x \mapsto 2f(x) - 1$.



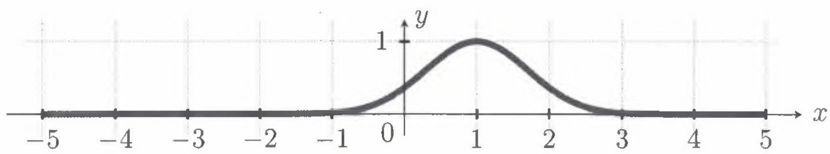
On considère maintenant le graphe suivant, indiquer à quelle transformation du graphe de f il correspond parmi les 4 propositions suivantes :

(a) $x \mapsto f(2(x+1))$,

(b) $x \mapsto f(2(x-1))$,

(c) $x \mapsto f(\frac{1}{2}(x+1))$,

(d) $x \mapsto f(\frac{1}{2}(x-1))$.



Exercice 3 (Suite). Un joueur joue au casino de la manière suivante : il mise toujours tout son argent sur le rouge; si le rouge sort, alors il gagne le double de sa mise, sinon il perd sa mise et mise le double de sa dernière mise sur le rouge. Par exemple au tour numéro 1 il mise 1 euro, si le rouge sort il gagne 2 euros et s'il perd il mise 2 euros au tour numéro 2, et s'il perd à nouveau il mise 4 euros au tour numéro 3...
On note u_n la somme que le joueur mise au tour numéro n (en particulier $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$).

(1) Rappeler la définition d'une suite géométrique.

(2) Pour $n \geq 1$, écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

1

(3) On suppose que le joueur perd à chaque tour. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique, et en déduire une formule pour u_n en fonction de n.
(4) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?
(5) On suppose que le joueur perd ses neuf premières mises (du tour 1 au tour 9) : combien a-t-il perdu en tout ? On rappelle que $2^{10} = 1024$.
(6) On suppose maintenant qu'au tour 10 le joueur gagne enfin après avoir perdu aux 9 premiers tours. Le casino lui donne alors deux fois sa mise u_{10}. Combien le joueur a-t-il gagné (ou perdu) sur toute cette partie, en comptant les 9 tours perdants et le dixième tour gagnant ?

Exercice 4 (Étude d'une fonction). Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{2x}\right) - x$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(2) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+e^{2x}}$. Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f. Indiquer si la fonction f a un (ou plusieurs) point(s) d'inflexion. Déterminer le(s) intervalle(s) sur lesquels f est convexe ou concave.
(4) Déterminer si la courbe représentative de f admet une droite asymptote en $-\infty$. Démontrer que la courbe représentative de f admet la droite $y = x$ comme asymptote en $+\infty$ (on pourra utiliser l'égalité $2x = \ln(e^{2x})$.
(5) Soit a un nombre réel, rappeler l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\ln(2)$. On pourra utiliser les valeurs $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(5) \simeq 1,6$.
(6) Tracer la courbe représentative de f, ainsi que la tangente de la question (5).

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire).

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre fixe. Ecrire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = -ay(x).$$

(2) Résoudre le problème de Cauchy

$$y_a'(x) = -ay_a(x), \quad y_a(0) = 1$$

c'est-à-dire trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) = -ay(x)$ qui vaut 1 en 0.

(3) On considère la solution trouvée dans la question (2). Déterminer le paramètre a en sachant que $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 1/2$.
Existe-t-il un paramètre a tel que $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 2$? Justifier les réponses.
(4) Trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation non homogène

$$y'(x) = -y(x) + x$$

puis écrire toutes ses solutions.

Exercice 6 (Bonus: Nombres complexes).

(1) Trouver la forme algébrique de toutes les racines complexes de l'équation

$$z^2 + z + 1 - i = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et module de chacune de ces racines.

(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

Rattrapage ?

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 1 juillet 2015

Tous documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

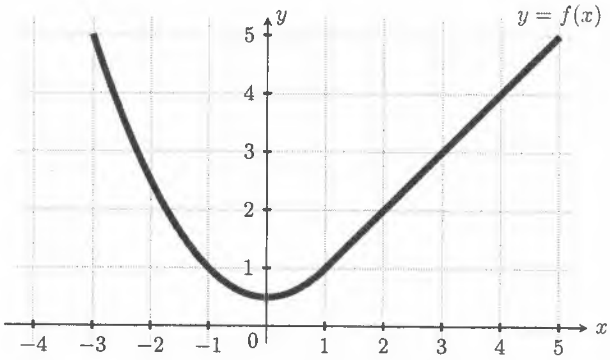
Exercice 1 (Logique). On étudie la proposition suivante :

Si tous les interrupteurs sont éteints, alors l'électricité est coupée.

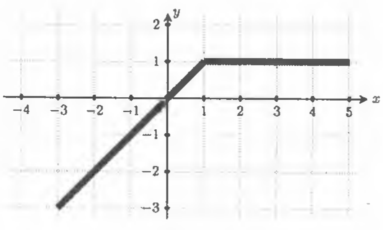
(1) Écrire la négation de cette proposition.
(2) Écrire la contraposée de cette proposition.
(3) Si on suppose que la proposition est vraie et que l'électricité est coupée, peut-on en déduire avec certitude que tous les interrupteurs sont éteints ?

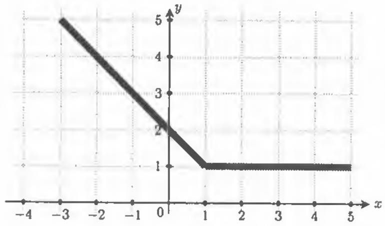
Exercice 2 (Transformations sur le graphe). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

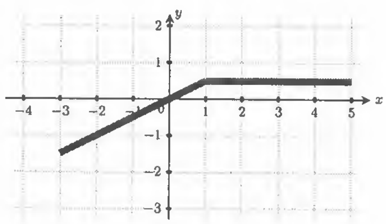
(1) $x \mapsto -f(x) - 2$,
(2) $x \mapsto f(2x) + 1$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2} f(x) - 1$.



On considère maintenant les trois graphes suivants, lequel correspond au graphe de la dérivée de f ?


(A)


(B)


(C)

Exercice 3 (Suite). On considère la suite récurrente $(p_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} p_1 = 0, \\ \forall n \geq 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$$

(1) Calculer p_0.
(2) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(3) Calculer, si elle existe, la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$.
(4) La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est-elle croissante ? Décroissante ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 (Étude d'une fonction). Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Montrer que f est impaire. Calculer les limites de f aux extrémités de son domaine de définition.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x :

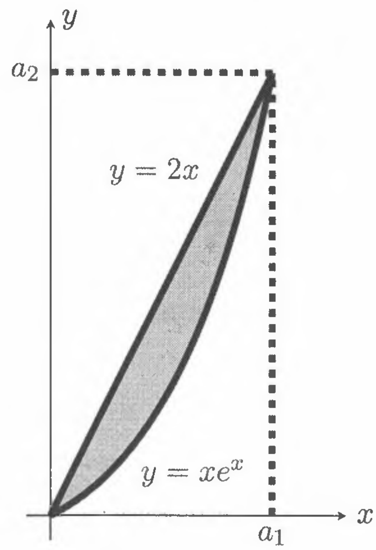
$$f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 1}.$$

La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$? Si oui, écrire son équation. Dans ce cas, préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote (au-dessus ou au-dessous).
(4) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Calcul intégral). On considère la région plane P définie par:

$$P = \{(x, y) \mid x \geq 0, xe^x \leq y \leq 2x\}$$

et représentée en gris sur le graphique suivant :



(1) Calculer les coordonnées $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ du point d'intersection de la droite d'équation $y = 2x$ avec la courbe d'équation $y = xe^x$.
(2) Une fois a_1 déterminé, calculer

$$I_1 = \int_0^{a_1} 2x \mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{a_1} xe^x \mathrm{d}x.$$

(3) Calculer la surface de la région P.

Maths Si

I11-Programmation I : Python

Examen de session 1

6 Janvier 2015

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits -
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (5 points).
On définit les variables suivantes :

```
x = 1.0
positif = (x>0)
date = "Mardi 6 janvier"
t = (date, positif)
premier = ['2', '3', 5, 7, '11', '13', 17]
diplome = { 'L' : "Licence" , 'M' : "Master",'D' : "Doctorat"}
```

(1) Donner le type Python de chacune des variables, préciser si c'est un type mutable ou pas.

(2) Donner la valeur des expressions suivantes :

```
(x+3)/2        date + " 2015"    premier[4:]        diplome['M']
positif        date[2:4]         premier[-2][1]
t              date[::2]         premier + [19]
```

(3) Donner le résultat de l'exécution du script suivant :

```
#debut du script
def f(n):
        return (n//2)

def g(n):
        n=n*2

def h(n):
        print(n%2)
```

```
# suite du script
x=4
print(f(x))
g(x)
print(x)
y=f(6)
print (y)
h(f(10))
print (n)
```

Exercice 2. (2 points).
On considère le script suivant qui génère une "guirlande électrique" représentée par la liste de ses ampoules allumées ou éteintes (`True` pour une ampoule allumée et `False` pour une ampoule éteinte) à partir d'un entier `n` :

```
n=int(input("entrer un nombre ? "))
guirlande=[]
while (n>0):
    AmpouleAllumee = (n%2==1)
    guirlande=guirlande + [AmpouleAllumee]
    n = n//2
print(guirlande)
```

(1) Faire une table des valeurs de ce script pour $n = 21$, puis pour $n = 7$ sur le modèle suivant

n	guirlande	$n > 0$	AmpouleAllumee	Ecran

(2) Dans les deux cas précédents $n = 21$ et $n = 7$, quel est le nombre d'ampoules de la guirlande ? Combien sont allumées ?

(3) Quelle valeur donner à n pour obtenir une guirlande à 5 ampoules toutes allumées ?

Exercice 3. (3 points).
On définit les trois "smileys" par les chaînes de caractères `smile=':-)'`, `sad=':-('` et `wink=';-)'`.
Écrire un script qui parcourt la chaîne et affiche le nombre de "smileys" trouvés dans la chaîne de caractères `ch`.

```
ch = "c'est une bonne idee d'aller au cinema :-)
mais j'ai deja vu le film :-(
on pourrait aller en voir un autre ;-)"
```

Exercice 4. (3 points). La fonction `randint(a,b)` importée du module `random` est appelée avec deux arguments `a` et `b` et renvoie un nombre entier tiré au hasard entre `a` et `b` (`a` et `b` compris).

(1) Donner l'instruction qui permet d'importer la fonction `randint`.

(2) En utilisant la fonction `randint`, écrire un script qui affiche une liste de `n` entiers strictement positifs et strictement inférieurs à `m` où les entiers `n` et `m` sont lus en entrée.

Exercice 5. (5 points)

(1) Écrire la fonction `occurrences(e,L)` qui renvoie le nombre de fois où l'élément `e` apparait dans la liste `L`.

(2) En utilisant la fonction `occurrences`, écrire la fonction `minoritaire(L)` qui renvoie l'élément qui apparait le moins souvent dans la liste, si plusieurs éléments sont candidats c'est le premier élément trouvé qui sera retourné.

5

(3) Un élément `e` est majoritaire dans la liste `L`, s'il apparait plus de `n//2` fois où `n` est le nombre d'éléments de la liste. En utilisant la fonction `occurrences`, écrire la fonction `majoritaire (e,L)` qui retourne `True` si l'élement `e` est majoritaire dans la liste `L` et `False` sinon.

(4) En utilisant la fonction `majoritaire`, écrire la fonction `element_majoritaire(L)` qui retourne l'élément majoritaire de la liste `L` s'il existe et `-1` sinon. Notons que si l'élément majoritaire existe, il est unique.

Exercice 6. Questions de cours (2 points).

(1) Expliquer en une phrase le rôle de chacun des scripts ci-dessous

```
#script 1
fd=open("voeux.txt", 'w')
s="Bonne annee"
fd.write(s)
print(" 2015 !", file=fd)
fd.close()
```

```
#script 2
nom=input('entrez un nom')
fd=open(nom, 'r')
print(fd.read())
fd.close()
```

Maths Si

I11-Programmation I : Python

Examen de session 2

26 juin 2015

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits -
Le barème est donné à titre indicatif.

EXERCICE 1. (5 points).
On définit les variables suivantes :

```
n = 21
pair = ((21%2)==0)
texte = "nombre impair"
t = (pair, texte)
carte = [7,8,9,10,'valet','dame','roi']
UFR = { 'ST' : "Sciences et Techniques" ,
'SE' : "Sciences Economique",
'I' : "Ingemedia", 'L': "Lettres", 'D' : "Droit"}
```

(1) Donner le type Python de chacune des variables, préciser si c'est un type mutable ou pas.

(2) Donner la valeur des expressions suivantes :

```
n // 2        "ce " + texte    carte[3:]          UFR['L']
pair          texte[1:4]       carte[-3][1]
t             texte[::3]       carte + ['as']
```

(3) Donner le résultat de l'exécution du script suivant :

```
#debut du script
def f(x):
        return (x+2)
def g(y):
        y=y-2
def h(z):
        print(z*2)
```

```
# suite du script
n=2
print(f(n))
g(n)
print(n)
h(f(1))
print(z)
```

EXERCICE 2. (3 points).
On considère le script suivant

```
n=int(input("entrer un nombre ? "))
while (n>0):
    print(n%10)
    n = n//10
```

(1) Faire une table des valeurs de ce script pour $n = 45021$

n	$n > 0$	Ecran

(2) Écrire un script qui affiche la somme des chiffres décimaux d'un entier n lu en entrée.

EXERCICE 3. (3 points).
Écrire un script qui affiche une chaine de caractères,lue en entrée, qui a été concaténée avec son miroir. Par exemple, si la chaîne lue en entrée est `"Bonjour"` alors le résultat affiché sera `BonjourruojnoB`

EXERCICE 4. (7 points) Jeu du Loto
On dispose de la fonction `randint(a,b)`, qui appelée avec deux arguments `a` et `b`, renvoie un nombre entier tiré au hasard entre `a` et `b` (`a` et `b` compris).

(1) Écrire une fonction `dejaTire(n,L)` qui retourne `True` si le nombre `n` est dans la liste `L` et `False` sinon.

(2) Écrire une fonction `jouer()` qui retourne une liste de 6 nombres choisis par l'utilisateur, les nombres doivent être tous distincts et compris entre 1 et 49 (inclus).

(3) Écrire une fonction `tirage()` qui retourne une liste de 7 nombres entiers choisis aléatoirement entre 1 et 49 (inclus). Cette liste correspond au tirage du LOTO. Les 6 premiers nombres sont distincts, le septième (le numéro complémentaire) est un nombre au hasard entre 1 et 49 (inclus).

(4) Écrire une fonction `gagnant(bulletin, le_tirage)` qui retourne `True` si le bulletin passé en paramètre est gagnant par rapport au tirage passé en paramètre, et `False` sinon. Un bulletin est gagnant si au moins 3 nombres contenus dans le bulletin sont inclus aussi dans le tirage.

(5) Écrire le script qui fait jouer un utilisateur, effectue et affiche le tirage et affiche **gagné** ou **perdu** selon le cas.

EXERCICE 5. Questions de cours (2 points).
Expliquer en une phrase le rôle de chacun des scripts ci-dessous

```
#script 1
fd=open('data.txt', 'r')
print(fd.read())
fd.close()
```

```
#script 2
from random import randint
print(randint(1,randint(50,100)))
```

UNIVERSITÉ DE TOULON

EXAMEN DE P111 Session 2 2014-2015

L1 BIO-MATHS- PC-SI

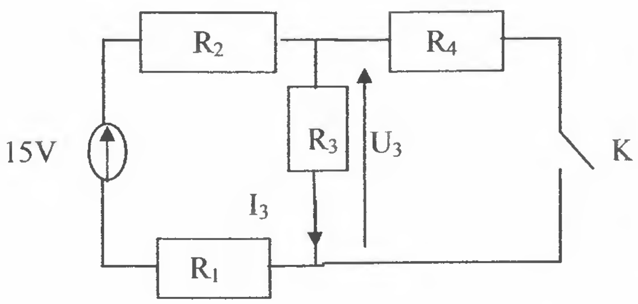
COURS, TD et DOCUMENTS INTERDITS

CALCULATRICES AUTORISEES

PORTABLES STRICTEMENT ETEINTS

DUREE 2h00

ELEC-1 *(2,5 points)*



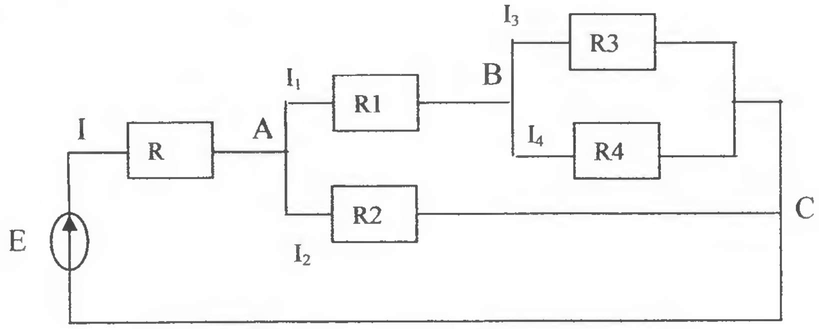
Données : $R_1 = 1\Omega$; $R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 3\Omega$; $R_4 = 6\Omega$

On étudie l'état électrique du montage ci-contre dans deux situations :
-Situation A : l'interrupteur K est ouvert
- Situation B : l'interrupteur K est fermé
1) Etablir l'expression littérale de la résistance équivalente au montage dans les deux situations et calculer les valeurs numériques correspondantes.
2) En utilisant la division de tension, établir l'expression littérale de la tension U_{AB} dans les deux situations et calculer les valeurs numériques correspondantes.
3) En déduire l'intensité qui parcourt la résistance R_3 dans les deux cas.

ELEC-2 *(4 points)*

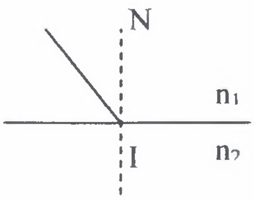
Le montage ci-dessous est alimenté par un générateur de tension continue E .
Il délivre une intensité I = 15mA et les valeurs des résistances sont données :
$R = 174\Omega$; $R_1 = 300\Omega$; $R_2 = 180\Omega$; $R_3 = 300\Omega$; $R_4 = 200\Omega$

1) Calculer la résistance équivalente à tout le montage.
2) En déduire la valeur de la f.e.m. E.
3) Calculer la tension aux bornes de R
4) Quelle loi permet de déterminer à présent la tension U_{AC} ? Calculer sa valeur.
5) Quelle loi permet de déterminer l'intensité I_2 parcourant R_2 ? Calculer sa valeur.
6) Quelle loi permet d'en déduire l'intensité I_1 parcourant R_1 ? Calculer sa valeur.
7) En utilisant la division de courant, calculer l'intensité I_3.
8) Calculer la tension U_{BC}.



8

OPTIQUE-1 *(2 points)*



Un rayon incident tombe a la surface de séparation de deux milieux d'indices $n_1 = 1{,}6$ et $n_2 = \frac{4}{3}$.

1) Le rayon va se réfracter en s'éloignant ou en se rapprochant de la normale IN?
2) Le rayon d'incidence 0° est-il dévié ?
3) Calculer l'angle de réfraction correspondant à une incidence de 36°.
4) Calculer l'angle d'incidence correspondant à une réfraction de 89°
5) Que se passe-t-il pour un rayon d'incidence 60° ?

OPTIQUE-2 *(4 points)*

1) Où doit-on placer un objet pour que son image à travers une lentille convergente (de distance focale image f') soit virtuelle ?

2) A quelle(s) distance(s) d'un objet faut-il placer une lentille divergente de distance focale $f' = -6$ cm pour obtenir une image de dimension double de celle de l'objet ? Préciser la nature de l'objet.

3) On associe une lentille L_1 de vergence -10 δ et de centre O_1 à une lentille L_2 de distance focale $f_2' = 5$ cm et de centre O_2. La lentille L_2 est située à 20 cm à droite de la lentille L_1. Construire **sur un même schéma** les rayons issus d'un objet AB situé à 5 cm à droite de la lentille L_1 permettant d'obtenir A_1B_1 (image de AB à travers L_1) puis A'B' (image de A_1B_1 à travers L_2) [*on recommande de prendre pour échelle horizontale 1:2*].

MECANIQUE *(7,5 points)*

1) Un cycliste s'est mis au défi de parcourir 120 km en moins de 4 heures, mais son circuit est très vallonné et il réalise qu'il lui a déjà fallu une heure quarante pour faire le premier quart du parcours. Quelle devra être sa vitesse moyenne minimum sur le restant du parcours s'il veut réaliser son défi ?

2) Un cheval de trait tire un tronc d'arbre ayant une masse de 400 kg sur une pente légèrement descendante, inclinée de 10°. La corde qui relie le tronc au cheval forme un angle θ=20° par rapport à la surface du sol. Les forces de frottement entre le tronc et le sol sont de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse et k le coefficient de frottement avec k=434 N.s.m^{-1} (on donne l'accélération de pesanteur g=9,81 m.s^{-2}).

a- Représenter sur un schéma l'ensemble des forces extérieures qui s'exercent sur le tronc d'arbre en respectant leurs points d'application respectifs.

b- Si le cheval exerce une force de 200 N sur la corde, quelle sera l'accélération du tronc (initialement immobile) à l'instant où le cheval commence à tirer sur la corde ?

c- Le tronc atteindra-t-il ensuite une vitesse limite et si oui, calculer cette vitesse limite.

3) Deux enfants jouent dans la cour d'un immeuble. Le premier lance vers le haut une balle depuis le jardin avec une vitesse initiale v_0^A, le deuxième, situé au 6^{e} étage (20 m de haut) lâche au même moment une autre balle sans vitesse initiale. A partir de la RFD, déterminer la vitesse avec laquelle le premier enfant doit lancer la balle vers le haut pour que les deux balles retombent au même moment ?

Université de Toulon
Licence 1:ère Année SI, MATH & MIASHS, M12, 22/06/2015

Examen de Statistiques

Avertissement: Durée: 2h. Fiches personnelles et calculettes autorisées.
Barême indicatif: I:4, II:6, III:5, IV:5.

Exercice 1: Moyennes.

1) Le taux d'intérêt du Livret A court à 2.5% les 3 premières années, à 2% les 3 suivantes, et à 1.25% les 4 dernières. Quel est le taux d'intérêt moyen sur les 10 ans? Donner une approximation de ce taux par un développement limité [on rappelle que $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ pour x petit]. Comment s'appelle cette moyenne?

2) Les villes A et B sont distantes de d_{AB} =2km, et chacune d'elles est distante de $d_{AC} = d_{BC}$ =3km de la ville C. On fait un circuit reliant A à C à la vitesse v_{AC} =50km/h, puis C à B à la vitesse v_{BC} =40km/h, et enfin B à A à la vitesse de v_{AB} =30km/h. Quel est le temps total T de parcours? En déduire la vitesse moyenne, i.e. la vitesse nécessaire pour parcourir le circuit dans le temps T? Généraliser pour des distances d_{AB}, d_{BC}, d_{AC} et des vitesses $v_{AB}, v_{BC}, v_{AC} > 0$ quelconques. Comment s'appelle cette moyenne?

Exercice 2: Soit $\mathcal{D}_I$ la distribution statistique par classes des salaires dans une grande entreprise (en kEUR):

$$\begin{pmatrix} I_i: & [0,10[& [10,20[& [20;30[& [30,40[\\ n_i: & 20 & 15 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Tracer l'histogramme des fréquences.

2) Déterminer la classe modale et la classe médiane de $\mathcal{D}_I$.

3) Calculer la médiane de $\mathcal{D}_I$ par interpolation linéaire. Calculer de meme le 3ème quartile.

4) Calculer la moyenne de $\mathcal{D}_I$.

5) Déterminer l'histogramme des masses de $\mathcal{D}_I$, déterminer la classe médiale et la médiale par interpolation linéaire. Quel est le pourcentage des salaries qui gagnent plus de 75% de la masse salariale totale? Que peut-on dire de la concentration de cette distribution?

6) Calculer l'indice de Gini par la formule $\gamma = \sum_i p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1}$.

Exercice 3: Soient les populations $\mathcal{U}_1 = \{1,2,3\}$, et $\mathcal{U}_2 = \{2,3,6,9\}$

1) Calculer la moyenne et la variance de $\mathcal{U}_1$ et de $\mathcal{U}_2$.

2) Soit $\mathcal{M}$ la distribution des moyennes de tous les 2-échantillons $\frac{1}{2}(x_i + y_j)$, $(x_i, y_j) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. La représenter sous forme d'un tableau. Déterminer la moyenne et la variance de $\mathcal{M}$. Conclusion?

3) Soit $\mathcal{D}$ la distribution des différences de tous les 2-échantillons $x_i - y_j$, $(x_i, y_j) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. La représenter sous forme d'un tableau. Déterminer la moyenne et la variance de $\mathcal{D}$. Conclusion?

4) *Question bonus*: Retrouver les résultats de 2) et 3) au moyen des variables aléatoires.

10

Exercice 4: On considère les notes x et y obtenues respectivement en Maths et en Economie par une promotion d'étudiants.

$$\begin{pmatrix}
. & y & [0,5[& [5,10[& [10,15[& [15,20[\\
x & . & . & . & . & . \\
[0,5[& . & 3 & 5 & 4 & 0 \\
[5,10[& . & 3 & 6 & 6 & 2 \\
[10,15[& . & 1 & 4 & 9 & 5 \\
[15,20[& . & 0 & 0 & 5 & 10
\end{pmatrix}$$

On les rapportera à leur centre de classe.

1) Déterminer les distributions marginales.

2) Déterminer les distributions conditionnelles. Les variables x et y sont elles indépen- dantes?

3) Calculer les moyennes marginales $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, les variances marginales $\sigma^2(x)$, $\sigma^2(y)$, et la covariance $\mathrm{Cov}(x,y)$.

4) Quelle est l'équation de la droite de régression de y par rapport à x?

Université de TOULON **Année Universitaire 2014-2015**
Faculté des Sciences et Techniques
L1 renforcée Maths Si

R13 ?

Arithmétique
Examen de Janvier 2015

Exercice 1. Quels sont les entiers naturels n tels que $n^2 - 36$ est le carré d'un entier naturel m ?

Exercice 2. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a que $n^3 + 23n + 2016$ est un multiple de 6.

Exercice 3. On considère le polynome : $(P) \qquad 2x^2 + xy - 6y^2$

1. Factoriser (P)
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2 \qquad (P) = 15$

Exercice 4. Déterminer les entiers naturel a et b tels que
$ppcm(a, b) = 40 \quad$ et $a + b = 60$

Exercice 5. Déterminer les entiers naturel a et b tels que $a < b$ et
$ppcm(a, b) - 3pgcd(a, b) = 108$

12

Analyse 1

Controle terminal (session 2) - M21- MATH - juin 2015.

Calculettes et documents non autorisés.

Exercice 1. (Calcul de limites)

Calculer la limite de $F_i(x)$ quand x tend vers 0^+ dans les cas suivants .

$$F_1(x) := \frac{x^3 + 2x}{\sqrt{x}} \quad F_2(x) := \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad F_3(x) := \frac{x + x^3}{1 - \sqrt{1 + x}}$$

Exercice 2. (Théorème de valeur moyenne)

Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} < \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2}$$

Exercice 3. (Calcul de développements limités)

1) Calculer les développements limités à l'ordre 8 au point 0 des fonctions $f_1(x) := \ln(1 + x + x^6)$ et $f_2(x) := \sqrt{1 + x^4}$.

2) Calculer les développements limités à l'ordre 8 au point 1 des fonctions $g_1(x) := \frac{1}{x}$ et $g_2(x) := \frac{1}{x^2}$.

Exercice 4. (Asymptotes)

Déterminer l'équation de l'asymptote au voisinage de $-\infty$ de la courbe d'équation $y = \sqrt{2 + x^2} - 2|x|$. La position de l'asymptote par rapport à la courbe devra être précisée.

Exercice 5. (Calcul de primitives)

1) Factoriser $P(x) = 1 + x - x^3 - x^4$.

2) Déterminer l'ensemble des primitives sur $]-1, 1[$ de la fonction

$$f(x) := \frac{x^2 + x + 1 + 2x(1 - x^2)}{P(x)}.$$

FIN

Math Si

UTLN. L1. Examen d'algèbre linéaire MS22.
Session du 13 mai 2015. Durée : 3h.
Aucun document ni calculette ne sont autorisés

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

1) Donner l'expression de $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
2) L'application f est-elle bijective?
3) Trouver $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$. En donner une base et la dimension
4) Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = \mathbb{R}^3$
5) Vérifier que $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ où $u = (-4, 3, 2)$; $v = (-4, 0, 1)$; $w = (2, 1, 0)$, est bien une base de $\mathbb{R}^3$
6) Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$ de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$
7) En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{E}$
8) Calculer B^2 puis B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ (on pourra faire une récurrence)

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $X_1 = (2, 2, 1, 0)$; $X_2 = (1, 4, 2, -1)$; $X_3 = (2, 1, -1, 0)$; $X_4 = (2, -5, 4, 2)$.
1)Quel est le rang de cette famille de vecteurs? En déduire la dimension de $E := \operatorname{Vect}\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$
2) Soit $F := \operatorname{Vect}\{Y_1, Y_2\}$ où $Y_1 = (2, 1, 4, 5)$ et $Y_2 = (1, 2, 3, 4)$. Montrer que $E + F = E$ et $E \cap F = F$
3) Montrer que $(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow z = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y; t = 2x + y$

Exercice 3 Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + y + z - 4t = 0 \\ 2x - 2y + z - 5t = 1 \\ 2x - y + z - 4t = -1 \end{cases} \tag{0.2}$$

Exercice 4 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P = (X^3 - X^2 + X - 1)(X^2 + X + 1) \tag{0.3}$$

Université de TOULON et du VAR Année Universitaire 14-15
Faculté des Sciences et Techniques

L1 Math - PC

MECANIQUE STATIQUE - M23
Examen de Mai 2015
L'utilisation des calculatrices est interdite.

Les deux exercices proposés sont indépendants

Exercice 1 : Etude d'un équilibre

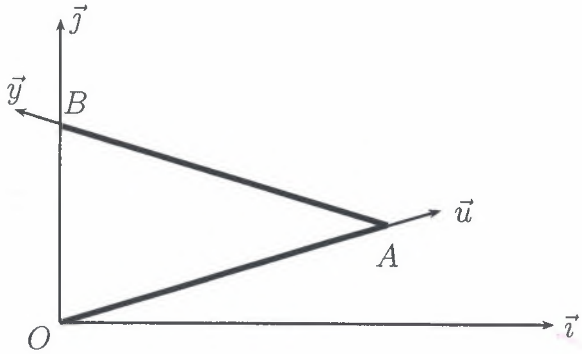
Relativement au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (avec le vecteur $\vec{\jmath}$ vertical ascendant), on considère un système Σ situé dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ l'accélération de la pesanteur.

Le système Σ est constitué de deux barres S_1 et S_2 homogènes de masse m de longueur ℓ et de centres respectifs G_1 et G_2.
La barre S_1 d'extrémités O et A reste en contact avec l'axe $O\vec{\imath}$ au point O. On note $\vec{u}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{OA} = \ell\vec{u}$, on introduit $\vec{v}$ le vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit une base orthonormée directe et on désigne par α l'angle $(\vec{\imath}, \vec{u})$. On note $T\vec{\imath} + N\vec{\jmath}$ la réaction du sol en O et on suppose que ce contact obéit à une loi de Coulomb de coefficient f.

La barre S_2 d'extrémités A et B reste en contact avec l'axe $O\vec{\jmath}$ au point B. On note $\vec{y}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{AB} = \ell\vec{y}$, on introduit $\vec{x}$ le vecteur tel que $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{k})$ soit une base orthonormée directe et on désigne par β l'angle $(\vec{\jmath}, \vec{y})$. On note $P\vec{\imath} + Q\vec{\imath}$ la réaction du mur en B et on suppose que ce contact a lieu sans frottement.

Les deux barres sont en liaison sphérique au point A. Un dispositif extérieur non précisé permet d'exercer un couple $\gamma\vec{k}$ sur la seule barre S_1.

On suppose de plus que les angles α et β sont tous les deux compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.



1. Questions de cours :
   — Rappeler la condition d'équilibre d'un solide.
   — Rappeler la condition d'équilibre d'un système de solides.
2. En remarquant que les deux barres ont même longueur, donner une relation entre α et β.
3. Traduire le fait que le contact en B a lieu sans frottement.
4. Ecrire au point A le torseur des efforts qui s'exercent sur la barre S_2.
5. Ecrire au point A le torseur des efforts qui s'exercent sur le système.

6. Ecrire les équations d'équilibre du système Σ. En déduire T, P, N et γ en fonction de α
7. Déterminer la position d'équilibre de Σ lorsque $\gamma = \sqrt{3}\, m\ell g$, et donner une condition sur le coefficient de frottement f pour qu'un tel équilibre soit possible.

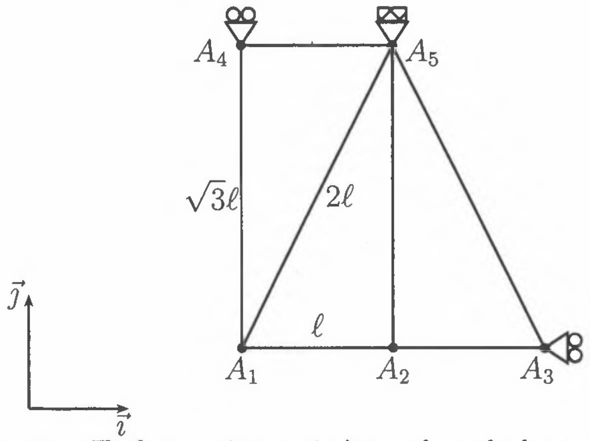
Exercice 2 : Etude d'un treillis

Dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le treillis élastique plan schématisé ci-dessous. Toutes les barres ont la même section S. **Le module d'Young de la barre A_1A_4 est égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}E$, tandis que celui de toutes les autres est égal à E.**

Le noeud A_1 est fixe, le noeud A_2 est mobile dans la direction $\vec{\jmath}$, le noeud A_5 est mobile dans la direction $\vec{\imath}$ et les noeuds A_3 et A_4 sont mobiles.

Les barres A_1A_2, A_2A_3 et A_4A_5 sont de longueur ℓ, les barres A_1A_4 et A_2A_5 sont de longueur $\sqrt{3}\ell$ alors que les barres A_1A_5 et A_3A_5 sont de longueur 2ℓ.

Une charge $\vec{F_1} = -F\,\vec{\imath} - \sqrt{3}F\,\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_1, une charge $\vec{F_2} = F\,\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_2, une charge $\vec{F_3} = -2F\,\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_3 et enfin une charge $\vec{F_4} = -\frac{F}{2}\,\vec{\imath}$ est appliquée au noeud A_4.



On note T_{ij} la tension qui règne dans la barre A_iA_j. Dans cet exercice on ne cherchera pas à calculer les réactions aux appuis.

1. Donner le degré de staticité du treillis (justifier la réponse).
2. Rappeler la définition du système cinématique. Ecrire les équations du système cinématique et exprimer les déplacements aux noeuds en fonction des allongements relatifs des barres.
3. Montrer que $T_{23} + T_{12} + 2\sqrt{3}T_{14} = 4T_{15}$
   Comment s'appelle cette relation. A quoi sert-elle ?
4. Rappeler la définition du système statique. En écrire les équations. En déduire les tensions dans les barres. Préciser pour chacune d'entre elles si elles sont en traction ou en compression.
5. Exprimer alors les déplacements des noeuds en fonction de F, ℓ, E et S.