

**Examen de Statistiques**

*Avertissement:* Durée: 2h. Fiches personnelles et calculettes autorisées.

Barème indicatif: I:4, II:6, III:5, IV:5.

**Exercice 1:** Moyennes.

1) Le taux d'intérêt du Livret A court à 2.5% les 3 premières années, à 2% les 3 suivantes, et à 1.25% les 4 dernières. Quel est le taux d'intérêt moyen sur les 10 ans? Donner une approximation de ce taux par un développement limité [on rappelle que  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  pour  $x$  petit]. Comment s'appelle cette moyenne?

2) Les villes A et B sont distantes de  $d_{AB} = 2\text{km}$ , et chacune d'elles est distante de  $d_{AC} = d_{BC} = 3\text{km}$  de la ville C. On fait un circuit reliant A à C à la vitesse  $v_{AC} = 50\text{km/h}$ , puis C à B à la vitesse  $v_{BC} = 40\text{km/h}$ , et enfin B à A à la vitesse de  $v_{AB} = 30\text{km/h}$ . Quel est le temps total  $T$  de parcours? En déduire la vitesse moyenne, i.e. la vitesse nécessaire pour parcourir le circuit dans le temps  $T$ ? Généraliser pour des distances  $d_{AB}, d_{BC}, d_{AC}$  et des vitesses  $v_{AB}, v_{BC}, v_{AC} > 0$  quelconques. Comment s'appelle cette moyenne?

**Exercice 2:** Soit  $\mathcal{D}_I$  la distribution statistique par classes des salaires dans une grande entreprise (en kEUR):

$I_i :$	[0, 10[	[10, 20[	[20; 30[	[30, 40[
$n_i :$	20	15	5	2

- 1) Tracer l'histogramme des fréquences.
- 2) Déterminer la classe modale et la classe médiane de  $\mathcal{D}_I$ .
- 3) Calculer la médiane de  $\mathcal{D}_I$  par interpolation linéaire. Calculer de même le 3ème quartile.
- 4) Calculer la moyenne de  $\mathcal{D}_I$ .
- 5) Déterminer l'histogramme des masses de  $\mathcal{D}_I$ , déterminer la classe médiale et la médiale par interpolation linéaire. Quel est le pourcentage des salaires qui gagnent plus de 75% de la masse salariale totale? Que peut-on dire de la concentration de cette distribution?
- 6) Calculer l'indice de Gini par la formule  $\gamma = \sum_i p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1}$ .

**Exercice 3:** Soient les populations  $\mathcal{U}_1 = \{1, 2, 3\}$ , et  $\mathcal{U}_2 = \{2, 3, 6, 9\}$

- 1) Calculer la moyenne et la variance de  $\mathcal{U}_1$  et de  $\mathcal{U}_2$ .
- 2) Soit  $\mathcal{M}$  la distribution des moyennes de tous les 2-échantillons  $\frac{1}{2}(x_i + y_j)$ ,  $(x_i, y_j) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ . La représenter sous forme d'un tableau. Déterminer la moyenne et la variance de  $\mathcal{M}$ . Conclusion?
- 3) Soit  $\mathcal{D}$  la distribution des différences de tous les 2-échantillons  $x_i - y_j$ ,  $(x_i, y_j) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ . La représenter sous forme d'un tableau. Déterminer la moyenne et la variance de  $\mathcal{D}$ . Conclusion?
- 4) *Question bonus:* Retrouver les résultats de 2) et 3) au moyen des variables aléatoires.

**Exercice 4:** On considère les notes  $x$  et  $y$  obtenues respectivement en Maths et en Economie par une promotion d'étudiants.

	$y$	$[0, 5[$	$[5, 10[$	$[10, 15[$	$[15, 20[$
$x$	.	.	.	.	.
$[0, 5[$	.	3	5	4	0
$[5, 10[$	.	3	6	6	2
$[10, 15[$	.	1	4	9	5
$[15, 20[$	.	0	0	5	10

On les rapportera à leur centre de classe.

- 1) Déterminer les distributions marginales.
- 2) Déterminer les distributions conditionnelles. Les variables  $x$  et  $y$  sont elles indépendantes?
- 3) Calculer les moyennes marginales  $\langle x \rangle$ ,  $\langle y \rangle$ , les variances marginales  $\sigma^2(x)$ ,  $\sigma^2(y)$ , et la covariance  $\text{Cov}(x, y)$ .
- 4) Quelle est l'équation de la droite de régression de  $y$  par rapport à  $x$ ?

MiASTH

MS 24 - SESSION1-2014/15 Licence MASS/SI 1ère année.

Analyse réelle

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé pour cette épreuve. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1.1 (3 points)

- 1) Donner la formule de Taylor à l'ordre 3 de  $f(x) = \sin x$  en  $x = 0$ .
- 2) Puis donner le DL à l'ordre 3 de  $g(x) = \sin(x^3)$  en  $x = 0$ .
- 3) Application: Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{x - \sin x}$$

Exercice 1.2 (4 points)

- 1) Donner le DL à l'ordre 2 de  $h(x) = \ln(1 + x)$  en  $x = 0$ .
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 \ln(x^2 + 13) - x^2 \ln(x^2) \right)$
- 3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$

Exercice 2.1 (3 points)

- 1) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. Quand dit-on que la série  $\sum u_n$  converge ?
- 2) Application : Soit  $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
Montrer que  $u_n = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}$ . Puis étudier la nature de la série  $\sum u_n$ . Quelle est sa somme?

Exercice 2.2 (4 points)

Etudier le nature de la série  $\sum u_n$  avec:  $u_n = \frac{n^2}{3+n^4}$ ;  $u_n = \frac{e^n}{n!}$ ;  $u_n = \frac{n^n}{n!}$ .

Exercice 3.1 (3 points)

- 1) Soit  $X > 0$ . Calculer  $I = \int_0^X t^3 e^{-t} dt$ .
- 2) Puis calculer  $I = \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt$ .

Exercice 3.2 (3 points)

Etudier la nature de l'intégrale:  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}} dx$ .

L1 MiASH

UTLN. L1. Examen d'algèbre linéaire MS22.

Session de juin 2015. Durée : 2h.

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés

### Exercice 1

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y + z$ .

- 1) Montrer que  $f$  est linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}$
- 2) Donner une base de son noyau et une base de son image
- 3)  $f$  est-elle injective? surjective?

### Exercice 2

Montrer que  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 2z = 0\}$  est un sous- espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  dont on donnera une base.

**Exercice 3** Résoudre par la méthode de Gauss le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ 2x + 3y + 4z + t = 2 \\ 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 4x + y + 2z + 3t = 4 \end{cases} \quad (0.1)$$

### Exercice 4

Discuter en fonction du paramètre  $m$  et résoudre le système

$$\begin{cases} (4m^2 - 1)x + (2m - 1)y = (2m + 1)^2 \\ (2m + 1)x + (4m - 1)y = 4m^2 - 1 \end{cases} \quad (0.2)$$