3/C R

Calculatrices autorisées, documents non autorisés.

Exercice 1 *Méthodes de point fixe (7 points)*

Considérons l'équation $x(1+e^x) = e^x$.

1. Montrer que cette équation admet une unique racine réelle ℓ dans $[0;1]$.
2. Écrire la méthode de NEWTON pour approcher la solution ℓ.
3. Proposer une autre itération de point fixe pour approcher ℓ. Montrer analytiquement que cette itération converge vers ℓ pour tout $x_0 \in [0;1]$ et faire l'étude graphique de la convergence.

Exercice 2 *Formule de quadrature (6 points)*

1. On désire développer une formule d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x \approx \alpha f(\beta).$$

Déterminer les valeurs des constantes α et β de telle sorte que le degré d'exactitude de cette formule de quadrature soit le plus élevé possible. Donner ce degré.

Rappel : pour $m \geq 0$,

$$\int_0^1 x^m \ln\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(m+1)^2}.$$

2. À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

3. Soit $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0,\dots,n$. On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles $[x_i;x_{i+1}]$ de largeur h. En déduire la formule de quadrature composite pour le calcul approché de

$$\int_a^b f(x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 *Interpolation & Méthodes d'ADAMS-MOULTON (7 points)*

Considérons le problème de CAUCHY suivant dont on suppose qu'il existe une et une seule solution :

$$\text{trouver } y\colon [t_0, T] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que}$$
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Le principe des méthodes numériques pour approcher la fonction y est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en N intervalles de longueur $h = (T - t_0)/N > 0$. Pour chaque nœud $t_n = t_0 + nh$ ($1 \leq n \leq N$) on cherche la valeur inconnue u_n qui approche $y(t_n)$. L'ensemble des valeurs $\{u_0 = y_0, u_1, \dots, u_N\}$ représente la solution numérique.

Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration approchée de l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_n et t_{n+1} car l'on a

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Les schémas d'ADAM approchent l'intégrale précédente par l'intégrale d'un polynôme interpolant f en des points donnés.

1. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_n\}$. Quel schéma reconnait-on ?
2. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_n, t_{n+1}\}$. Quel schéma reconnait-on ?
3. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ en proposant une adéquate initialisation de la suite. (Attention : on intègre f sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ mais on interpole f en t_{n+1}, t_n et t_{n-1})

MS41 Optimisation I - L2 MASS - Rattrapage - juin 2014

- ▷ Durée de l'épreuve : 2 heures.
- ▷ Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.
- ▷ **Documents et calculatrices autorisés.**
- ► *On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.* ***Une grande valeur sera attribuée à la rigueur et à la concision des raisonnements.***
- ► ***Le texte est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.*** *Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.*

Exercice 1 *(3 points)*

Pour un gaz parfait, l'énergie interne ε s'écrit en fonction du volume spécifique τ et de l'entropie spécifique s comme

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (\tau, s) &\mapsto \tau^{1-\gamma} e^{s/c_v} \end{aligned}$$

où $\gamma > 1$ et $c_v > 0$ sont deux constantes. Sachant que la pression p et la température T sont liées à l'énergie interne par les relations

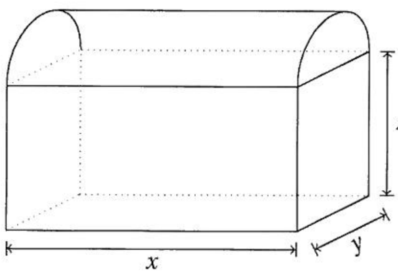
$$p = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}, \qquad T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s},$$

prouver la loi des gaz parfait, *i.e.* prouver que

$$\frac{p\tau}{T} = \text{constante}.$$

Exercice 2 *(6 points)*

Une boîte a la forme d'un parallélépipède surmonté par un demi-cylindre comme dans la figure ci-dessous



On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V égal à C.

1. Écrire $S(x, y, z)$
2. Écrire $V(x, y, z)$
3. Exprimer $z(x, y)$ comme solution de l'équation $V(x, y, z) = C$
4. Écrire $\tilde{S}(x, y) = S(x, y, z(x, y))$. Calculer et établir la nature des points critiques de $\tilde{S}(x, y)$

Exercice 3 *(6 points)*

Un industriel produit simultanément 2 biens A et B dont il a le monopole de la production et de la vente dans un pays. Soit x la quantité produite du premier bien et y la quantité produite du second. Les prix p_A et p_B auxquels il vend respectivement les bien A et B sont fonction des quantités écoulées selon les relations $p_A(x) = 28 - 3x$ et $p_B(y) = 22 - 2y$. Le coût de production total des quantités x et y est la fonction $c(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4xy$. Le bénéfice de l'entreprise si elle vend les quantités x et y est donc la fonction

$$b(x, y) = xp_A(x) + yp_B(y) - c(x, y).$$

1. L'industriel peut produire simultanément au mieux 5 biens. En supposant que l'entreprise désire utiliser à pleine capacité son usine, trouver la répartition de la production mensuelle permettant de maximiser le bénéfice de l'entreprise (on utilisera la méthode d'élimination ou réduction et on prouvera qu'il s'agit bien d'un maximum absolu). Donner la valeur maximale du bénéfice ainsi que les prix de vente de chacun des biens.

2. L'industriel s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise le bénéfice sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du bénéfice. La solution obtenue est-elle réalisable pour l'industriel ?

Exercice 4 *(8 points)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   1.1. Calculer le gradient de f_α pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   1.2. Montrer que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; que peut-on conclure sur la différentiabilité de f_α ?
2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$.
   2.1. Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y)$ et en déduire qu'il existe une valeur α_0 de α (à préciser) pour laquelle f_α est continue en $(0,0)$.
   2.2. Montrer que f_α admet des dérivées partielles en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = \alpha_0$ et calculer $\nabla f_{\alpha_0}(0,0)$.
   2.3. En utilisant la définition, prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0,0)$.
   2.4. Montrer que f_{α_0} est de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.