2009 - 2010 Module M 36
Université du Sud, Toulon-Var Compléments d'analyse en L2-MASS

# Examen du 13/01/10

**Questions de cours.** [6 points]

(1) Enoncez avec la précision voulue la définition d'une série entière.

(2) Quelles sont les règles de détermination du rayon de convergence d'une série entière.

(3) A titre d'exemple, développez $f(x) := cos(x)ch(x)$ en série entière (de la variable réelle $x$, en $x = 0$, et en déterminant son rayon de convergence).

D'autre part,

(4) Enoncez avec la précision voulue la définition d'une intégrale impropre.

(5) Donnez un exemple d'intégrale impropre.

**Exercice 1.** [6 points] Exercice pour un traitement rapide "vrai ou faux", dans chacun des trois cas considérés vous ajouterez quelques mots pour justifier votre réponse.

(1) vrai ou faux, la série entière de la variable réelle $x$, de terme général $a_n x^n$ où $a_n := Ln(n), n \geq 1$, a un rayon de convergence égal à 1.

(2) vrai ou faux, la série entière de la variable réelle $x$, de terme général $b_n x^n$ où $b_n := \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$, a un rayon de convergence égal à 4.

(3) vrai ou faux, la fonction $x \mapsto Ln(1 - \frac{x^2}{5})$ est développable en série entière en 0, et le résultat vaut pour tout $x$ dans l'intervalle $]-\sqrt{5}, +\sqrt{5}[$.

**Exercice 2.** [6 points]

(1) Ecrivez un développement limité de Taylor à l'ordre 4 au voisinage de $x = 0$ pour la fonction $x \mapsto Ln(\frac{2-x}{5-x^2})$.

(2) Pouvez-vous étendre ce développement à un développement local en série entière, autrement dit à une série de Taylor ? et si oui, quel est le rayon de convergence de la série de Taylor obtenue ?

**Exercice 3.** [6 points]

(1) A l'évidence les deux intégrales suivantes définissant $I$ et $J$ posent problème en 0 : sont-elles convergentes ?

$$I := \int_0^2 \frac{1}{t(t+3)} dt,$$

$$J := \int_{-1}^0 \frac{1}{t(t+3)} dt.$$

(2) Pouvez-vous calculer $\int_{-1}^2 \frac{1}{t(t+3)} dt$ ? si oui, que trouvez-vous et comment justifiez-vous ce résultat ? si non, quelles sont les difficultés ?

(3) En introduisant $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit, pour modifier $I$ et $J$, que pensez-vous de la somme des deux intégrales modifiées $S_\varepsilon := \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t(t+3)} dt + \int_{+\varepsilon}^{2} \frac{1}{t(t+3)} dt$ ? discutez en fonction de $\varepsilon$ le calcul de $S_\varepsilon$. Que concluez-vous ?

## Corrigé des trois exercices

**Exercice 1**

(1) vrai : lorsque $a_n = Ln(n)$, il suffit d'appliquer la règle $\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Ici $\rho$ n'est autre que 1 puisqu'un équivalent de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ est $\frac{Ln(n)}{Ln(n)}$.

(2) vrai : lorsque $b_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$, le calcul du quotient $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ donne $\frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2}$ équivalent à $\frac{4n^2}{n^2}$ pour $n$ grand, la limite est donc bien 4.

(3) vrai : les calculs sont repris ci-après.

**Exercice 2** Il faut faire les calculs ...
$f(x) := Ln(\frac{2-x}{5-x^2}) = Ln(\frac{2}{5}) + Ln(1-\frac{x}{2}) - Ln(1-\frac{x^2}{5})$, ceci ayant un sens si $|x| < 2$ et si $|x| < \sqrt{5}$.
Ensuite, au voisinage de $x = 0$, on a $Ln(1-\frac{x}{2}) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{3.8} - \frac{x^4}{4.16} + o(x^5)$,
et $Ln(1-\frac{x^2}{5}) = -\frac{x^2}{5} - \frac{x^4}{2.5^2} + o(x^5)$, d'où en sommant
$f(x) = Ln(\frac{2}{5}) - \frac{1}{2}x + (\frac{1}{5} - \frac{1}{8})x^2 - \frac{1}{3.8}x^3 + (\frac{1}{2.25} - \frac{1}{4.16})x^4 + o(x^5)$.
Alors on peut poser $a_{2p} := \frac{1}{5^p.p} - \frac{1}{2^{2p}.2p}$ et $a_{2p+1} := -\frac{1}{2^{2p+1}.(2p+1)}$, ce qui est satisfaisant pour $p = 1, 2$ dans le premier cas, pour $p = 0, 1$ dans le second.

Pour $|x| < 2$ on a en définitive $f(x) = Ln(\frac{2}{5}) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**Exercice 3** Avant tout calcul, on note que $\frac{1}{t(t+3)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3})$.

Avec les notations utilisées en cours, les questions concernent les convergences respectives de

$$\int_{\to 0^+}^{2} \frac{1}{t(t+3)} dt,$$

et de

$$\int_{-1}^{\to 0^-} \frac{1}{t(t+3)} dt.$$

Notons tout de suite $\varepsilon$ la borne inférieure de la première intégrale, $\varepsilon$ étant destiné à tendre vers zéro, la divergence est rapidement claire comme $-\frac{1}{3}Ln(\varepsilon)$, et donc $I$ tend vers $+\infty$. Notons $-\varepsilon$ la borne supérieure de la seconde intégrale, la divergence est tout aussi rapidement claire comme $\frac{1}{3}Ln(|-\varepsilon|)$, et donc $J$ tend vers $-\infty$.

Il n'est pas possible de faire la somme de deux intégrales impropres divergentes $I + J$ qui est sous la forme indéterminée $+\infty - \infty$ ! La relation de Chasles interdit donc de donner un sens à l'intégrale $\int_{-1}^{2} \frac{1}{t(t+2)} dt$ ...

Par contre il est remarquable que la somme des intégrales modifiées

$$\int_{\varepsilon}^{2} \frac{1}{t(t+3)} dt + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t(t+3)} dt$$

lève l'indétermination : en effet
on a très exactement $\frac{1}{3}Ln(2) - \frac{1}{3}Ln(5) + \frac{1}{3}Ln(\varepsilon+3) - \frac{1}{3}Ln(\varepsilon) + \frac{1}{3}Ln(\varepsilon) - \frac{1}{3}Ln(3-\varepsilon) + \frac{1}{3}Ln(2)$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}Ln(\frac{4}{5}) + \frac{1}{3}Ln(\varepsilon+3) - \frac{1}{3}Ln(3-\varepsilon)$,
à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient $\frac{1}{3}Ln(\frac{4}{5})$.
En conclusion on ne peut calculer $\int_{-1}^{2} \frac{1}{t(t+2)} dt$ somme indéterminée de deux intégrales impropres divergentes, mais on peut calculer lorsque $\varepsilon \to 0$ la limite de $\int_{\varepsilon}^{2} \frac{1}{t(t+3)} dt + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t(t+3)} dt$ qui est un nombre fini (le nombre obtenu $\frac{1}{3}Ln(\frac{4}{5})$), il y a là une nouvelle notion d'intégrale.

Université de Toulon et du Var
Département de Mathématiques

# Géométrie ( M 41 ) : L2 - MASS 2009/2010

**Examen de mai 2010**

3 heures

L'utilisation des documents et des calculettes n'est pas autorisée.

**Question 1** (6 points) Soit $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - y = 5\}$. Déterminer le polynôme quadratique en $x, y$ dont les zeros déterminent les coordonnées $(x, y)$ des points $P \in \mathbb{R}^2$ tel que $dist(P, \mathbb{D}) = dist(P, (3, 4))$.

**Question 2** (7 points) Soient $A, B, C$ trois points non dependants du plan affine. Soit pour un triple $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que $\sum_1^3 \lambda_i = 1$, $G := \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$. Soient $G_1 := -\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$, $G_2 := \lambda_1 A - \lambda_2 B + \lambda_3 C$, $G_3 := \lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C$.

Faites une esquisse ;

Montrez que $Aff(A, G_1), Aff(B, G_2), Aff(C, G_3)$ sont concourants en $G$ ;

Montrez que $A \in Aff(G_2, G_3), B \in (G_1, G_3), C \in (G_1, G_2)$.

**Question 3** (7 points) Soit pour $(x, y, z)$ dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ $f$ définie par

$$f(x, y, z) :=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{2}y + z + 3\sqrt{2}\right), \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} + 1, \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{2}y + z + \sqrt{2}\right)\right)$$

Démontrer que $f$ est une isométrie.

Reconnaître le type de $f$ et donner ses caractéristiques.

Esquisser.