

I31 - ALGORITHMIQUE II (2017-2018). SESSION 1. DURÉE : 2 HEURES.

Inscrivez vos nom et prénom uniquement sur votre copie double avec le numéro  $x$  qui apparaît en haut à droite de cette page  $+x/y/z+$ . À la fin de l'examen, insérez votre QCM dans votre copie double.

Remplissez ce QCM sans ratures au **STYLO** ou au **FEUTRE**. Documents, calculatrices, téléphones, etc. sont **interdits**. Les questions avec le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses, les autres une seule. Cocher une mauvaise réponse retire des points.

**Question 1** [+1] La recherche dichotomique dans une liste d'éléments *triée* s'effectue en temps

- quasi-linéaire       logarithmique       quadratique       linéaire

**Question 2** ♣[+1] La complexité de l'algorithme du tri lexicographique sur un alphabet de taille  $q$  pour trier une liste de  $n$  mots est :

- $O(n)$         $\Omega(qn)$        quadratique  
 quasi-linéaire        $\Theta(q \log(n))$         $\Theta(n \log_q(n))$

**Question 3** [+1] Que vaut la somme  $\sum_{p=1}^{10} \binom{10}{p}$  ?

- 518       1018       1026       511       1023

**Question 4** [+1] Quelle est la profondeur  $p$  d'un arbre binaire *équilibré* (tout niveau dont la profondeur est  $< p$  est plein) qui contient 125 nœuds (on rappelle qu'une feuille est un nœud particulier) ?

- 8       5       4       6       7

**Question 5** [+1] Soit  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Combien de chiffres contient l'écriture en base 5 de l'entier  $25^k - 1$  ?

- $k - 1$         $k + 1$         $k$         $k - 2$         $2k$

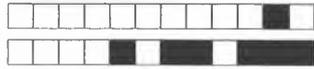
**Question 6** ♣[+1] Soit  $E = \{x_0, x_1, \dots, x_7\}$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  codées par vecteurs caractéristiques entiers. Quel(s) entier(s) code(nt) la partie  $(A \cap B) \setminus \{x_2, x_4\}$  ?

- $(A \vee B) \wedge 20$         $A \vee B \vee 18$         $A \wedge B \wedge 20$   
  $(A \wedge B) \wedge -20$         $(A \wedge B) \vee -18$         $\neg(\neg A \vee 20 \vee \neg B)$

**Question 7** [+1] Quelle est l'expression postfixe de l'expression infixe suivante :

$$(1 + x) \times [(7 - x) + (4 - 2)] + 2 ?$$

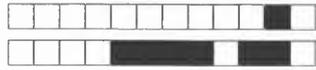
- 1, +, ×, 7, -, x, +, 4, -2, +, 2       1, x, +, ×, 7, x, +, ×, 4, 2, -, 2, +  
 1, x, +, 7, x, -, 4, 2, -, +, ×, 2, +       1, x, +, 7, x, -, ×, 4, 2, -, +, +, 2



**Question 8** [+3] On considère la liste  $L = [3, 8, 1, 6, 1, 0, 3, 5, 3, 6, 3, 3, 5, 4]$ . Remplissez l'APO ci-dessous avec les valeurs de la liste  $L$  après qu'ENTASSER( $L$ ) l'aura transformée en tas. **Repassez au stylo/feutre sur les nœuds, feuilles et branches de cet APO en laissant vierges les éléments inutilisés.** Cerclez deux fois le premier nœud auquel va être appliqué l'algorithme TAMISER.

3  2  1  0





**Question 9** [+3] Écrivez un algorithme RAM qui lit les valeurs sur la bande d'entrée et écrit leur moyenne sur la bande de sortie. La valeur 0 indique la fin de la lecture. Commentez votre programme !

3 2 1 0

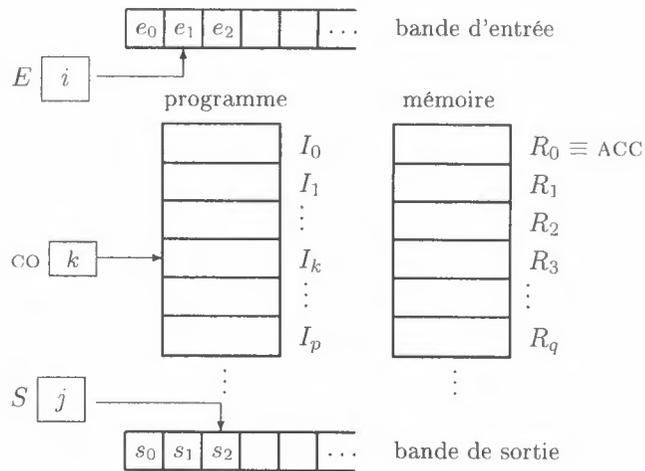
00	_____	#	.....
01	_____	#	.....
02	_____	#	.....
03	_____	#	.....
04	_____	#	.....
05	_____	#	.....
06	_____	#	.....
07	_____	#	.....
08	_____	#	.....
09	_____	#	.....
10	_____	#	.....
11	_____	#	.....
12	_____	#	.....
13	_____	#	.....
14	_____	#	.....
15	_____	#	.....
16	_____	#	.....
17	_____	#	.....
18	_____	#	.....
19	_____	#	.....
20	_____	#	.....
21	_____	#	.....
22	_____	#	.....
23	_____	#	.....
24	_____	#	.....
25	_____	#	.....
26	_____	#	.....
27	_____	#	.....



# Licence "Sciences pour l'Ingénieur" : Algorithmique II

## PRÉSENTATION DE LA MACHINE RAM

La machine RAM est constituée d'un ensemble de registres  $R_0, R_1, \dots$  qui constituent sa *mémoire*, d'une *bande d'entrée* indexée par un registre  $E$ , d'une *bande de sortie* indexée par un registre  $S$  et d'un *programme* composé d'instructions  $I_0, I_1, \dots$  indexé par un registre  $CO$ , le *compteur ordinal*. Les registres de la mémoire et les deux bandes ne peuvent contenir que des entiers relatifs  $Z$  tels que  $-b \leq Z < b$  où  $b$  est une borne arbitrairement grande (en général une puissance de 2 par commodité). Le compteur ordinal et les registres  $E$  et  $S$  ne sont pas bornés.



Le cycle de fonctionnement de la machine RAM est simple : le *compteur ordinal* ( $CO$ ) (initialisé à 0) contient le numéro de l'instruction à décoder. Une fois l'instruction exécutée, le compteur ordinal est incrémenté et c'est l'instruction suivante qui est exécutée et ainsi de suite sauf si l'instruction est une *rupture de séquence*. Les entrées sorties se font respectivement sur une bande de lecture et d'écriture potentiellement infinies et indexées par  $N$ . À chaque instruction de lecture (resp. d'écriture), le registre  $E$  (resp.  $S$ ) initialement nul est incrémenté. Pour pouvoir réaliser des opérations complexes, on dispose de l'ensemble des registres  $R_i$  de la mémoire pour y stocker des résultats. Le registre  $R_0$  a un statut particulier, c'est l'*accumulateur*. L'exécution d'une opération arithmétique remplace le contenu de l'accumulateur par le résultat de cette opération et les instructions de rupture de séquence dépendent du contenu de ce registre.

À l'exception des instructions READ, WRITE et STOP, toutes les instructions sont décomposées en deux blocs, le *code opération* et l'*adresse* : CODOP adr. Le code indique la nature de l'opération réalisée et l'adresse est soit celle d'une cellule de la mémoire,

Type	Instruction	Signification
Entrées/Sorties	READ	$ACC \leftarrow e_i, i \leftarrow i + 1$
	WRITE	$s_j \leftarrow ACC, j \leftarrow j + 1$
Affectations	LOAD #n	$ACC \leftarrow n$
	LOAD n	$ACC \leftarrow R[n]$
	LOAD @n	$ACC \leftarrow R[R[n]]$
	STORE n	$R[n] \leftarrow ACC$
	STORE @n	$R[R[n]] \leftarrow ACC$
Arithmétiques	ADD n	$ACC \leftarrow ACC + R[n]$
	SUB n	$ACC \leftarrow ACC - R[n]$
	MUL n	$ACC \leftarrow ACC \times R[n]$
	DIV n	$ACC \leftarrow ACC \div R[n]$
	MOD n	$ACC \leftarrow ACC \% R[n]$
	INC n	$R[n] \leftarrow R[n] + 1$
	DEC n	$R[n] \leftarrow R[n] - 1$
Ruptures de séquence	JUMP n	$CO \leftarrow n$
	JUMZ n	$CO \leftarrow n$ si $ACC = 0$
	JUML n	$CO \leftarrow n$ si $ACC < 0$
	JUMG n	$CO \leftarrow n$ si $ACC > 0$
	STOP	arrêt du programme

soit celle d'une cellule du programme dans le cas d'une rupture de séquence. Le tableau regroupe les différentes instructions possibles. On peut décliner les 5 opérations arithmétiques avec #n et @n pour travailler respectivement avec la valeur de n et le registre  $R[R[n]]$ . On peut également utiliser l'adressage indirect pour l'incrément et le décrétement. Pour plus de lisibilité, on note  $R[n]$  le contenu du registre  $R_n$ . Un simulateur est accessible à l'adresse <http://zanotti.univ-tln.fr/RAM>.

## ALGORITHME DE CALCUL DE LA FACTORIELLE SUR LA MACHINE RAM

Ce programme de quelques lignes calcule la factorielle du nombre entier inscrit sur la première cellule de la bande d'entrée. L'hypothèse implicite sur la borne  $b$  de la machine RAM utilisée est que si  $n$  désigne l'entier en question,  $n! < b$ . Le résultat des opérations arithmétiques se faisant toujours dans l'accumulateur, il est nécessaire de conserver les résultats intermédiaires (ici les produits successifs) dans un deuxième registre  $R_2$ . Le registre  $R_1$  contient quant à lui les valeurs successives  $n, n - 1$  etc... Il faut remarquer que l'on fait toujours le produit sans se préoccuper de la valeur du registre  $R_1$  après la décrémentation. On teste alors si le produit est nul. Si c'est le cas, on affiche le contenu du registre 2, sinon on range la valeur obtenue dans le registre  $R_2$ .

- ALGO FACTORIELLE
0. READ
  1. JUMZ 8
  2. STORE 1
  - > 3. STORE 2
  4. DEC 1
  5. MUL 1
  6. JUMZ 10
  7. JUMP 3
  - > 8. LOAD #1
  9. STORE 2
  - >10. LOAD 2
  11. WRITE
  12. STOP

Peut on réellement dire qu'il s'agit d'un algorithme qui calcule la factorielle d'un nombre entier ? Pourquoi ?

## Architectures et Synthèse des Contrôleurs Logiques

### TP N°1 & 2 : Prise en main du logiciel ispLEVER

#### 1 Préambule

Le logiciel ispLEVER est dédié à la programmation des circuits du fabricant Lattice Semiconductor Corporation (PAL, GAL, ispGAL, CPLD, EPLD, FPGA, etc...). La version "ispLEVER classic" est gratuite mais non libre. Une licence d'un an renouvelable est proposée. La version Linux est payante ; néanmoins la version Windows peut-être parfaitement émulée sous Wine. ispLEVER se présente sous la forme d'une suite de logiciels comportant un navigateur permettant la gestion de projets. Les circuits peuvent être décrits à travers soit une saisie de schémas, soit une description dans un langage de type HDL comme ABEL-HDL, Verilog ou encore VHDL. Si l'on souhaite effectuer des descriptions comportementales, il est nécessaire d'installer le module de synthèse d'architecture "Synplify Synthesis". La suite intègre un simulateur logico-fonctionnel ainsi qu'un éditeur de stimuli. Enfin, le module "ispVM" permet de programmer des composants de type *isp* (in situ programming) directement sur la carte et donc sans programmeur.

#### 2 Implantation d'un système combinatoire dans un GAL 16V8

On se propose d'implanter un comparateur combinatoire de deux mots de 3 bits avec propagation des comparaisons partielles. Les mots seront notés  $A = a_3a_2a_1$  et  $B = b_3b_2b_1$ . Le circuit devra fournir les 3 sorties  $S(A > B)$ ,  $I(A < B)$  et  $E(A = B)$  actives au niveau logique haut.

1. En consultant la datasheet du composant, vérifiez que le nombre d'I/O est compatible avec le circuit à réaliser,
2. Trouvez les équations correspondant à une cellule élémentaire de comparaison (entrées :  $E_{i+1}$ ,  $S_{i+1}$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ , sorties :  $E_i$ ,  $S_i$ ),
3. Réalisez la simulation fonctionnelle du circuit avec la suite ispLEVER à partir d'une description sous forme de schémas hiérarchisés,
4. Réalisez la simulation fonctionnelle du circuit à partir d'une description structurelle ABEL-HDL. On veillera, ici aussi, à effectuer la description de façon hiérarchisée (mot clé : `instance`).
5. Réalisez la simulation fonctionnelle du circuit à partir d'une description comportementale ABEL-HDL. Étudiez les équations obtenues.

#### 3 Implantation d'un système séquentiel synchrone dans un GAL 16V8

On se propose maintenant de reprendre la comparaison des deux mots de 3 bits  $A$  et  $B$  sous la forme d'une machine d'états synchrone. On supposera que les mots sont reçus séquentiellement poids forts en tête au rythme d'une horloge  $H$ .

1. Décrivez la machine en ABEL-HDL (state description). Synthétisez puis simulez la machine,
2. Implémentez la machine sur un GAL 16V8 puis testez en le fonctionnement sur une platine de test.

## Travaux Pratiques d'Architecture des Contrôleurs Logiques

### TP N°2 (alternatif) : Jeu Pong-like

Cahier de charges : Il s'agit de mettre en place un jeu électronique d'adresse de type « Pong » sous la forme d'un système séquentiel synchrone implanté dans un GAL 16V8 branché sur une platine de TP. Outre le composant GAL, on utilisera sur la platine un groupe de 4 LEDs disposées côte à côte notées  $L_4, L_3, L_2, L_1$  ainsi que trois boutons poussoirs notés  $G, D$  et start.

Après une remise à zéro (activation du bouton start), la partie peut commencer entre les deux joueurs « gauche » et « droit » manipulant respectivement les boutons  $G$  et  $D$ . Le joueur qui appuie en premier sur son bouton effectue un service en direction de son adversaire. Le trajet de la balle est simulé par le défilement de l'éclairage sur la rampe de LEDs. Lorsque la balle arrive dans le camp de l'adversaire –la LED  $L_4$  allumée pour le joueur « gauche » et la LED  $L_1$  pour le « droit »–, ce dernier peut la renvoyer en appuyant sur son bouton. On doit appuyer ni trop tôt ni trop tard ; dans le cas contraire, la partie est perdue et la LED désignant le camp du vainqueur clignotera alors 2 fois.

Un graphe d'état (modèle de Mealy) incomplet du système vous est proposé sur la figure 1. La symbolique utilisée pour la lecture du graphe est la suivante :

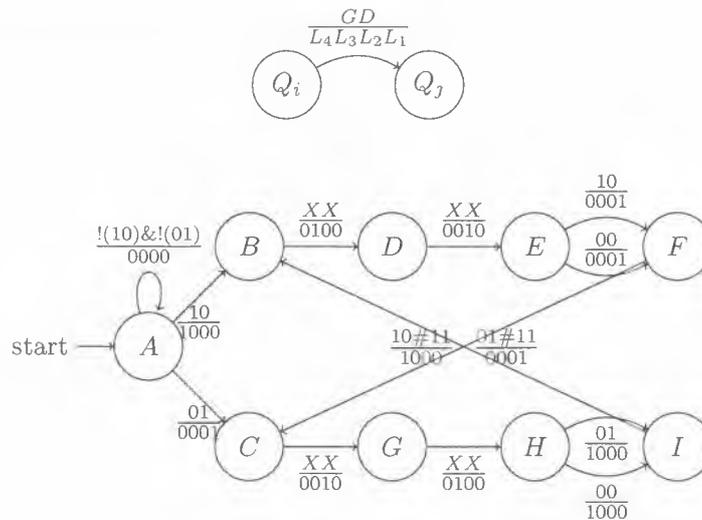


FIGURE 1 – Graphe d'état (à compléter).

#### Questions :

1. Complétez le graphe d'état pour lequel il manque essentiellement la gestion de la fin de partie lorsque l'on a appuyé trop tôt ou trop tard pour renvoyer la balle (6 états permettant le clignotement de la LED dans le camp du vainqueur) et le retour à une nouvelle mise en jeu.
2. Décrivez le graphe en langage ABEL-HDL sur ispLEVER de façon à ce que la machine n'utilise pas plus de 4 bascules D pour constituer son registre d'état. Pourquoi doit-on limiter la taille du registre d'état à 4 bascules pour une implantation dans un GAL 16V8 ?
3. Implantez le système dans un GAL 16V8.
4. Câblez puis testez le jeu sur la platine. On utilisera le signal d'horloge de fréquence 1Hz disponible sur la platine.

**EXAMEN P311 : Electrostatique-Magnétostatique- 1ère session 2017-2018**

Durée 2h, tel portable et tout document interdits, calculatrice non programmable autorisée

Le barème est donné à titre indicatif

**Exercice 1 : (5pts)**

Deux charges électriques ponctuelle  $q$  et  $q'$  positives sont fixées sur un axe Ox de vecteur directeur  $\vec{i}$ , à une distance  $D$  l'une de l'autre. On posera que l'abscisse de  $q'$  est supérieure à celle de  $q$ .

1 – Exprimer les forces  $\vec{F}_{qq'}$  et  $\vec{F}_{q'q}$ , les représenter sur un schéma et calculer leur module sachant que :  $q = 10^{-8}$  C,  $q' = 1,62 \cdot 10^{-8}$  C et  $D = 10$  cm.

2 – Dans quelle partie de l'axe Ox faut-il placer une charge  $q''$  pour qu'elle soit en équilibre quelque soit son signe ? Calculer la distance  $x$  qui la sépare de  $q$  quand l'équilibre est réalisé.

**Exercice 2 : (5pts)**

Aux sommets d'un carré ABCD de côté  $a$  et de centre O, sont placées quatre charges ponctuelles  $q_A$ ,  $q_B$ ,  $q_C$  et  $q_D$  de telle sorte que  $q_A$  et  $q_C$  soient diagonalement opposées.

Faire un schéma de la situation en indiquant notamment les vecteurs unitaires qui seront utilisés et exprimer le champ électrique  $\vec{E}_O$  et le potentiel  $V_O$  au centre du carré dans les quatre cas suivants ( $q > 0$ ) :

- 1)  $q_A = q_B = q_C = q_D = q$
- 2)  $q_A = q_C = q$  et  $q_B = q_D = -q$
- 3)  $q_A = q_B = q_C = q$  et  $q_D = 2q$
- 4)  $q_A = q_B = q$  et  $q_C = q_D = -q$

**Exercice 3 : (6pts)**

On considère un fil infini et infiniment mince le long de l'axe Oz et portant une densité linéique de charge uniforme  $\lambda > 0$ . NB : Faire les schémas nécessaires dans les deux questions.

1 – Exprimer le champ électrique créé à la distance  $r$  du fil par la méthode directe (intégration de champs électriques élémentaires produits par des charges élémentaires).

2 – Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Gauss, en justifiant clairement le choix de la surface de Gauss utilisée.

**Exercice 4 : (4pts)**

On considère une spire circulaire de centre O et de rayon R parcourue par un courant continu d'intensité  $I$ .

1- Donner l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_O$  en O et le représenter sur un schéma détaillé où seront représentés tous les paramètres utiles à sa construction.

2 – Calculer le courant  $I$  nécessaire à la production d'un champ magnétique de 5 Tesla (champ magnétique classique en IRM médicale) avec une spire de 1 m de diamètre. Commentaires.

PRENOM: .....

NOM: .....

Filière et groupe: .....

LA PRESENTE PAGE DE GARDE COMPORTE L'ÉNONCÉ  
ET VOTRE NOM, ELLE EST À RENDRE IMPERATIVEMENT

## ANGLAIS

Compréhension ORALE

L2S3

Toutes filières

E 31 ?

Durée : **30 minutes**

Epreuve notée sur **20 points**

Aucun document autorisé

**Listen to this extract** about the creation of false memory between Izzie Clarke and crime psychologist and author of *The Memory Illusion*, Julia Shaw from University College London. (duration of the audio programme : 3 mns 30).

**1. Tick the correct answers.**

**a. False memories**

- are the results of imagination and real experience
- can be based on true facts
- relate to a mixture of real memories and other pieces of information
- are part of a process in which the brain is confused between reality and dreams
- can lead to false convictions

**b. False memories are all alike.**

- right
- wrong

*Justify from the audio :* -----

**c. Someone can believe they commit a crime although they didn't.**

- right
- wrong

(NO JUSTIFICATION REQUIRED HERE)

**d. Julia's study is focused on :**

- understanding how a crime is likely to happen
- showing how people get to confess something they didn't do
- pointing out the police might sometimes be responsible for false confessions
- interviewing people who assaulted the police when they were teenagers

**2. At one point, Julia says, "if you've got someone on the stand..." What exact situation does she refer to? (You can explain in French)** -----

-----  
-----

**3. Tick the true statements about the people interviewed by Julia:**

- they were contacted by Julia a long time before the study took place
- they attended university
- they already had children of their own
- they had difficulty in remembering past events
- they were aware how emotional such an interview would be
- they believed they had committed a crime

**4. Translate into French :** 'Over twenty minutes they'd build up the sense of 'oh, she knows something about my life...' -----  
-----  
-----

**5. Why exactly does Julia need the participants to trust her in her study?** -----  
-----  
-----

**6. Give the exact English translation of these expressions picked up from the audio.**

- a. *on présente quelqu'un dans un décor* : -----  
-----
- b. *ce à quoi une personne réelle ressemble vraiment* : -----  
-----
- c. *une agression avec arme* : -----
- d. *les preuves sont maigres* : -----
- e. *tu comptes sur la mémoire* : -----
- f. *poser des questions approfondies* : -----

**7. How many false memories did Julia's interview actually include?**

- one false memory
- two false memories
- one false memory and two real ones

**8. What were the bit(s) of reality that Julia added to make her story-telling more credible?** -----  
-----

# Programmation en langage C sous unix

## aucun document autorisé

vendredi 18 Mai 2018 de 14:00 à 16:00

-----  
 / Vous repondrez aux questions en \  
 | utilisant deux lignes en moyenne, |  
 \ sans rature... ni surcharge ! /  
 -----

```

  \  ^__^
  \  (oo)\_______
      (__)\       )\/\
          ||----w |
          ||     ||
  
```

Q 1. Quel est l'inventeur du Langage C ?

Q 2. Lister 5 outils (commande) utiles pour le développement en langage C sous unix.

Q 3.

```

exam> gcc -Wall warn.c
warn.c: In function 'main':
warn.c:3:1:implicit declaration of
function 'puts'
[-Wimplicit-function-declaration]
  
```

- gcc a-t-il produit un exécutable ?
- Quel est le problème ?
- Comment supprimer l'avertissement ?

Q 4. Préciser l'affichage produit par :

```
1 char x = 'x'; x++; printf("%c", x); x--;
```

Q 5.

```
1 int main( int argc, char* argv[] ) {
2 return argc;
3 }
```

x.c

```
exam> gcc -Wall x.c; ./a.out 1 2 3
exam> echo $?
```

Quelle est la valeur affichée sur le terminal ?

Q 6. Comment coder plus simplement

```
if ( x != ( (x>>1)<<1 ) ) proc( x );
```

Q 7. Préciser l'affichage produit par :

```
int i = 3; int *j=&i ; *j *= 4;
printf ( "%d\n" , i );
```

Q 8. Que fait la commande :

```
1 exam> grep -Eo 2018 source.c | wc -l
```

Q 9. Comment obtenir un fichier objet à partir de la source toto.c ?

Q 10. Lister 10 mots clefs du langage C.

Q 11. Lister 5 options du compilateur gcc en précisant leurs rôles ?

Q 12.

```
#define PRINT(x) printf("%d", x )
```

- Quelle est la nature du symbole PRINT ?
- Quelle phase de compilation gère ce symbole ?

Q 13. Quels sont les identificateurs des flux standards ?

Q 14. Quel est le résultat de `make -s`

```
1 hello : world
2     echo @@ $<
3 world :
4     echo @@ $<
```

Q 15.

```
1 all :
2 prog.o : prog.c
3     gcc -c prog.c
4 prog.x : prog.o
5     gcc prog.o -o prog.x
```

- Quel est le résultat de `make` ?
- Comment obtenir un exécutable ?
- Quelle est la nature de l'action ligne 5 ?

Q 16.

```
1 unsigned int i;
2 char *s;
3 //...
4 printf( "%d-eme car de %p:%d", i, s, s[i]);
5 //...
```

Corriger la ligne 3.

Q 17. Quelles sont les lignes syntaxiquement correctes

```
1 typedef * flottant float;
2 typedef float montype *;
3 typedef char table [64];
4 typedef int [ ] tableau;
```

Q 18.

```
1 unsigned char wt( unsigned x )
2 { unsigned char r = 0;
3 while ( x > 0 ) {
4     r = r + ( x & 1);
5     x = x >> 1;
6 }
7 return r;
8 }
```

Quel est le résultat de `wt(10)` ?

Q 19.

```
1 int f( int x )
2 {
3 int y;
4 switch( x ){
5     case 0 : y = 1; break;
6     case 1 : y = 2; break;
7     case 2 : y = x;
8     default : y = 0;
9 }
10 return y;
11 }
```

- Quel est le résultat de `f(1)` ?
- Quel est le résultat de `f(2)` ?
- Quel est le résultat de `f(3)` ?

Q 20. Qu'est-ce que la `glibc` ?

Q 21. Établir une correspondance entre les lettres et les chiffres :

a	stdio.h	1	strlen
b	unistd.h	2	atoi
c	stdlib.h	3	scanf
d	ctype.h	4	getopt
e	string.h	5	isdigit

Q 22. Préciser les valeurs de *a*, *b*, *c* et *r* après :

```
s="1 2 et 3"; r=a=b=c=d=0;
r = sscanf( s, "%d %d %d", &a, &b, &c );
```

Q 23. Comment définir un type complexe pour représenter un nombre complexe ? Ecrire une procédure pour initialiser un complexe à la valeur nulle.

Q 24. Coder `int sdc( char *str )` qui retourne la somme des chiffres contenus dans chaîne `str`.

Q 25. Coder `float moyenne(int i, int j, int t[])` qui retourne la moyenne des éléments d'indice *i* à *j* du tableau *t*.

U.F.R. Sciences et Technique - L2 SI - 2017-2018  
Probabilités discrètes (M48)

Contrôle Terminal - 1ère session - 23 mai 2018

Durée : 2 h - Aucun document autorisé

Téléphone portable non autorisé

Calculatrice de type Collège autorisée

Attention, ce sujet comporte 4 exercices et 2 pages !

Pour ce contrôle, toute réponse affirmée sans preuve ni argument sera considérée comme donnée au hasard ... et donc comptée fausse ! Dans une réponse, il faut toujours mentionner au moins une fois la formule ou le résultat du cours que vous utilisez.

### Exercice 1 (3 points)

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile.

On note  $x$  la proportion de tricheurs dans la population : un tricheur est tellement habile qu'il arrive à toujours obtenir le résultat souhaité.

- Quelles valeurs peut prendre  $x$  ?
- Quelle est la probabilité  $p$  pour que le joueur avec lequel vous pariez et qui a obtenu pile soit un tricheur ? On donnera l'expression de  $p$  en fonction de  $x$ .
- Que vaut  $p$  quand  $x$  prend les valeurs extrêmes ? Conclusion ?
- Application numérique :  $x = 0, 2$ .

Conseil : Définir les événements  $P$  = "le joueur obtient pile" et  $T$  = "le joueur est un tricheur".

### Exercice 2 (5 points)

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté "Pile" et un côté "Face". La troisième est truquée et possède deux côtés "Face".

On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce.

- Quelle est, a priori, la probabilité que la pièce soit normale ?
- On lance la pièce et on obtient "Pile" : Quelle est la probabilité que la pièce soit normale ? Démontrer le résultat !
- On lance la pièce et on obtient "Face" : Quelle est la probabilité que la pièce soit normale ?
- On lance la pièce 3 fois et on obtient chaque fois "Face" : Quelle est la probabilité que la pièce soit normale ?

On notera les événements  $A$  = "la pièce est normale" et  $F_k$  = "on obtient "Face" au  $k$ -ème lancer" ( $k \geq 1$ ).

### Exercice 3 (9 points)

Soit un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  telles que  $X(\Omega) = \{-2; 0; 1\}$  et  $Y(\Omega) = \{-1; 1; 2\}$  et dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$	$y_1 = -1$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$
$x_1 = -2$	0,2	0,2	$\alpha$
$x_2 = 0$	0,1	0,1	0,05
$x_3 = 1$	0,2	0	0,1

- Donner la valeur de  $\alpha$  en justifiant votre réponse.
- Calculer les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .
- Montrer que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.
- Calculer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Y = 1$ .
- En déduire  $\mathbb{E}(X|Y = 1)$ .
- On pose  $Z = X + Y$ . Donner  $Z(\Omega)$  et la loi de probabilité de  $Z$ .
- Calculer  $\mathbb{E}(Z)$  de deux façons différentes.

### Exercice 4 - questions de cours (3 points)

Soit deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  de moyennes respectives  $m_X$  et  $m_Y$  et d'écart-type  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$ . On note :  $X(\Omega) = \{x_k\}_{1 \leq k \leq n}$  et  $Y(\Omega) = \{y_\ell\}_{1 \leq \ell \leq m}$ .

- Quelle est la définition mathématique de  $m_X$  ? de  $\sigma_X$  ? (en fonction des  $x_k$  !) Que représentent ces valeurs ?
- Quelle est la définition du coefficient de corrélation  $\rho_{XY}$  de  $X$  et  $Y$  (en fonction des  $x_k$  et des  $y_\ell$  !) ?
- Que représente-t-il ? Quelles sont ses propriétés ?
- Que peut-on dire de deux VA non corrélées ?
- Que peut-on dire de deux VA telles que  $\rho_{XY} = 1$  ?
- Quel est le lien entre indépendance et corrélation de  $X$  et  $Y$  ?