L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 10 janvier 2018

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits. Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique).

Soit P, Q et R trois propositions.

(1) Écrire la négation de la proposition $(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$

(2) Écrire la contraposée de la proposition $(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$

(3) Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}$. Écrire la négation "non$S$" de la proposition quantifiée S:

$$S: \qquad \forall \epsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k, \quad g_n < \epsilon$$

(4) La proposition S est-elle vraie pour la suite $g_n = \frac{1}{n}$? Justifier succinctement votre réponse.

(5) La proposition "non$S$" est-elle vraie pour $g_n = 1 + \frac{1}{n}$? Justifier succinctement votre réponse.

Exercice 2 (Tracés de courbes).

Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Pour les tracés des questions (2) à (4), vous pouvez soit les reporter sur votre copie soit les faire directement sur cet énoncé (à joindre dans ce cas à votre copie).

(1) Donner l'équation de f sur l'intervalle $]0, 2[$.

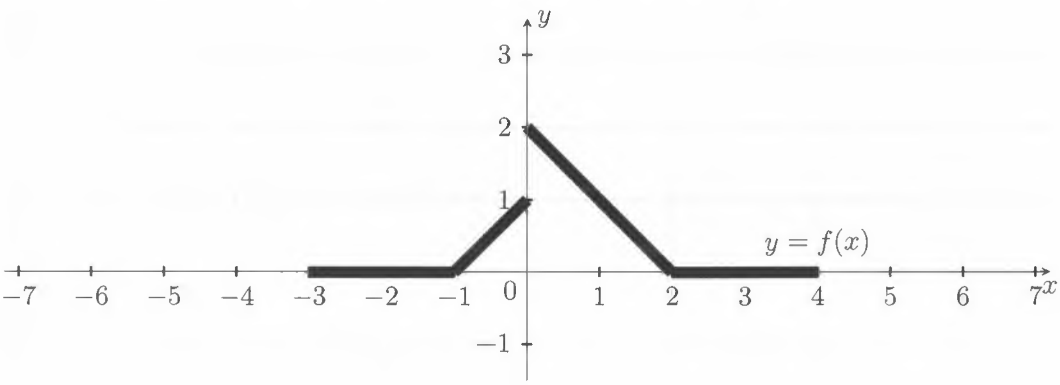
(2) Tracer le graphe de la fonction g où $g(x) = f(x+3)$.

(3) Tracer le graphe de la fonction h où $h(x) = 2f(x) - 1$

(4) Tracer le graphe de la fonction k où $k(x) = f(-2x)$

(5) Calculer la dérivée f' de f et trouver son domaine de définition.

(6) Tracer le graphe de la fonction dérivée f' sur un autre repère.



Exercice 3 (Suite).

Soit a, $b \neq 0$ et c trois nombres réels. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = cu_n - \frac{b}{2} \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Rappeler la définition d'une suite géométrique.

(2) Pour tout $n \geq 0$ on pose $v_n = u_n + b$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et trouver la valeur de c telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Pour les questions suivantes, c prend cette valeur.

(3) En déduire l'expression $u_n = (a+b)\left(\frac{1}{2}\right)^n - b$ pour tout n.

(4) Quelles valeurs faut-il prendre pour a et b afin que $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$?

(5) Dans le dernier cas, calculer $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puis $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction).

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \ln(2x^2 + 2)$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.

(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote ou une direction asymptotique en $+\infty$?

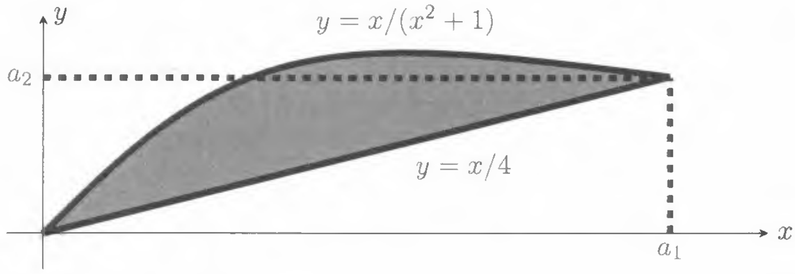
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1. On prendra comme approximation $\ln(2) \simeq 0,7$.

(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Calcul intégral). On considère la région plane P définie par:

$$P = \left\{(x,y)\ :\ x \geq 0,\ \frac{x}{4} \leq y \leq \frac{x}{x^2+1}\right\}$$

et représentée en gris sur le graphique suivant :



(1) Calculer les coordonnées $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ du point d'intersection de la droite d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ avec la courbe d'équation $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ tel que $a_1 \geq 0$.

(2) Une fois a_1 déterminé, calculer

$$I_1 = \int_0^{a_1} \frac{x}{4}\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{a_1} \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

(3) Calculer la surface de la région P.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen de deuxième session – juin 2018

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits. Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique). Soit P, Q et R trois propositions logiques.

(1) Écrire la négation de la proposition

$$R \Rightarrow (\, P \text{ ou } Q\,)$$

(2) Écrire la contraposée de la proposition

$$R \Rightarrow (\, P \text{ ou } Q\,)$$

(3) Écrire la négation de la proposition :

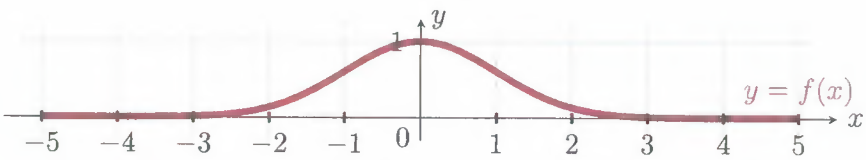
$$\exists \varepsilon \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad g_n > \varepsilon.$$

Exercice 2 (Transformations sur le graphe). On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ dont le graphe est rappelé ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

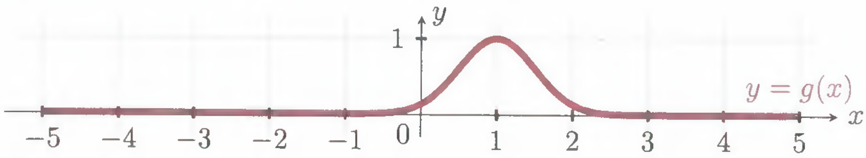
(1) $x \mapsto -f(x) - 2$,

(2) $x \mapsto f(x-1) - 1$,

(3) $x \mapsto 2f(x) + 1$.



On considère maintenant le graphe de la fonction $g(x) = f(ax+b) + c$ représenté ci-dessous. Déterminer les réels a, b, c.



Exercice 3 (Suite). On considère la suite récurrente $(p_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} p_2 = 0, \\ \forall n \geq 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{2}(2 - p_n) \end{cases}$$

(1) Calculer p_1 et p_0.
(2) La suite (p_n) est-elle une suite arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre ?
(3) Pour tout $n \geq 0$ on pose $q_n = p_n - \frac{2}{3}$. Démontrer que (q_n) est une suite géométrique.
(4) Calculer, si elle existe, la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$.
(5) Pour $n \geq 0$ calculer $u_n = q_0 + q_1 + \ldots + q_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

Tourner la page.

Exercice 4 (Étude d'une fonction). Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{2}{1 + e^{x/2}}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{x/2}(e^{x/2} - 1)}{(1 + e^{x/2})^3}$.

(3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

(4) Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$. En déduire pour quelle valeur de x cette tangente croise l'axe des abscisses.

(6) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.

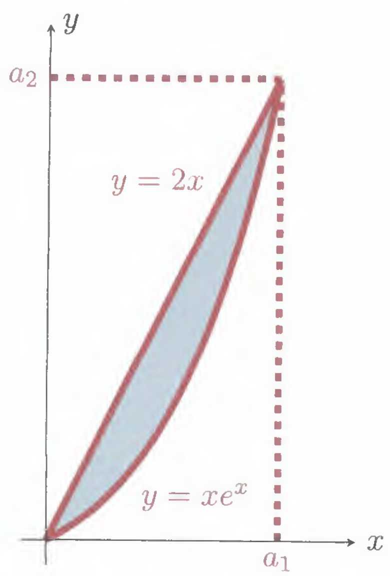
(7) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? *Justifier la réponse.*

(8) Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente en $x = 0$.

Exercice 5 (Calcul intégral). On considère la région plane P définie par:

$$P = \{(x, y) \mid x \geq 0, xe^x \leq y \leq 2x\}$$

et représentée en gris sur le graphique suivant :



(1) Calculer les coordonnées $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ du point d'intersection de la droite d'équation $y = 2x$ avec la courbe d'équation $y = xe^x$.

(2) Une fois a_1 déterminé, calculer

$$I_1 = \int_0^{a_1} 2x\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{a_1} xe^x\mathrm{d}x.$$

(3) Calculer la surface de la région P.

I11: Contrôle terminal - session 1
Licence 1 MATHS, PC, SI

Janvier 2018 (semestre 1) - Durée : 2h00

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits.
- Le barême est donné à titre indicatif
- Tous les scripts devront être clairement indentés et les noms de variables choisis de façon appropriée.
- Seules les instructions et fonctions internes à Python **vues en cours** sont autorisées.

EXERCICE 1. (2 points)
On considère les déclarations de variables suivantes:

```
nb = "12345"
L=[nb, 3.14, ["je","tu","il","nous","vous","ils"], (-1,2)]
```

Donner le **type** et la **valeur** des expressions suivantes:
`L[0]`, `L[1]+str(L[0][1])`, `(2,-1)+L[3]`,
`L[2][1:4]`, `L[-2][1::2]`, `L[0][:2]*L[-1][-1]`,

EXERCICE 2. (1 points) Écrire un script qui demande deux nombres entiers à l'utilisateur et affiche toutes les valeurs de la suite $U_0 = 1, U_{n+1} = \frac{U_n^2}{2} - 2U_n + 1$ pour n compris entre ces deux valeurs (incluses).

Exemple:

```
>>>
 Saisir un entier: 1
 Saisir un entier: 3
-0.5
2.125
-0.9921875
```


5

EXERCICE 3. (2 points)

On considère le script suivant :

```
n = int(input())
crible = [1]*n
i=2
while i<= n**0.5:
  if crible[i]==1:
    j=i*i
    while j<n:
      crible[j]=0
      j=j+i
  i=i+1
for i in range(2,len(crible)):
  if crible[i]==1:
    print(i)
```

Faire une table des valeurs de ce script pour l'entrée `n=16` sur le modèle suivant:

i	j	crible[i]==1	j<=n	ECRAN

EXERCICE 4. (4 points)

1. Écrire un script qui calcule la moyenne des nombres strictement positifs d'une part et la moyenne des nombres strictement négatifs d'autre part d'une série de nombres saisie par l'utilisateur; la saisie s'arrête quand le nombre 0 est rentré.

   Exemple:

```
>>>
 Saisir un nombre: 2
 Saisir un nombre: 10
 Saisir un nombre: -3
 Saisir un nombre: 9
 Saisir un nombre: -6
 Saisir un nombre: 0
 Moyenne positifs: 7.0
 Moyenne negatifs: -4.5
```

2. Écrire un script qui demande 2 chaînes de caractères `ch1` et `ch2` à l'utilisateur, la première de longueur quelconque et la deuxième de longueur 2 (inutile de faire la vérification dans le script), et affiche le nombre d'occurences de `ch2` dans `ch1`. Par exemple

```
>>>
  ch1 = ceci est certainement un exemple recent
  ch2 = ce
  nombres d'occurences: 3

>>>
  ch1 = aaa
  ch2 = aa
  nombres d'occurences: 2
```

3. On considère la liste prédéfinie `L=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]`. Écrire un script qui demande un nombre n à l'utilisateur et effectue une rotation de n cases sur la droite des éléments de la liste. Par exemple, pour $n = 2$ la liste deviendra `[9,10,1,2,3,4,5,6,7,8]`.

4. On définit une matrice comme étant une liste de listes de nombre. Par exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \texttt{[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]}.$$

   On dit qu'une matrice est creuse si strictement plus de la moitié de ses coefficients sont nuls. Écrire une fonction `est_creuse(A)` qui retourne `True` si la matrice `A` est creuse et `False` sinon. Par exemple:

```
>>> est_creuse([0,0,1],[1,0,0],[1,1,0])
True
>>> est_creuse([0,1],[1,0])
False
```

Exercice 5. (5 points)
On considère que le script et les fonctions suivants sont écrits dans le même fichier.

1. La distance entre deux mots est le nombre de lettres en lesquelles ils diffèrent. Par exemple la distance entre `caste` et `vaste` vaut 1, celle entre `part` et `partir` vaut 2 et celle entre `crypte` et `egyptien` vaut 5. Écrire un script qui retourne la distance entre deux mots saisis par l'utilisateur. Écrire une fonction `distance(ch1, ch2)` qui retourne la distance entre les deux chaînes de caractères `ch1` et `ch2`.

2. Écrire une fonction `decoupe(ch)` retourne une liste contenant tous les mots de la chaine `ch`. On suppose que `ch` est une suite de mots séparés uniquement par un ou plusieurs espaces.

```
>>> decoupe("ceci est un exemple     avec des espaces")
["ceci","est","est","un","exemple","avec","des","espaces"]
```

3. On considère une chaîne de caractères prédéfinie `vocabulaire` ayant le même format que la chaîne `ch` précédente. Écrire un script qui affiche les deux mots les plus proches de cette chaîne au sens de la distance de la question 1. Par exemple pour la chaîne `vocabulaire = "mais ou et donc or ni car"` le script devra afficher `ou` et `or`.

7

Exercice 6. (5 points)
On considère que les fonctions suivantes sont écrites dans le même fichier. Une équipe de football sera représentée en Python par un tuple contenant son nom, une liste de caractères représentant ses résultats ("D" pour défaite, "N" pour nul et "V" pour victoire) et son nombre de buts marqués. Par exemple (après 5 matchs) `("Toulon", ["V","D","N","N","V"], 12)`. Un championnat sera représenté par une liste d'équipes.

1. Écrire une fonction `nb_points(e)` qui retourne le nombre de points correspondant au résultat de l'équipe `e`. On considèrera qu'une victoire rapporte 3 points, un nul 1 point et une défaite 0 point.

2. Écrire une fonction `compare(e1,e2)` qui retourne 1 si l'équipe `e1` est devant `e2` au classement, 0 si elles sont à égalité et -1 sinon. Pour comparer deux équipes on commencera par regarder laquelle possède le plus de point puis, en cas d'égalité celle, qui a marquée le plus de buts.

3. Écrire une fonction `champion(c)` qui retourne le nom de la ou des équipes du championnat `c` première(s) au classement.

8

I11: Contrôle terminal
session 2
Licence 1 MATHS, PC, SI

Juin 2018 (session 2) - Durée : 2h00

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits.
- Le barême est donné à titre indicatif
- Tous les scripts devront être clairement indentés et les noms de variables choisis de façon appropriée.
- Seules les instructions et fonctions internes à Python **vues en cours** sont autorisées.

EXERCICE 1. (2 points)
On considère les déclarations de variables suivantes:

```
pi=3.1415
L=["ex", pi, (1,2,3), ["4","5","6","7","8","9"]]
```

Donner le type et la valeur des expressions suivantes:

```
L[1],        L[0]+str(L[1]),      L[3][0]+L[3][-1][0],
L[2][:2],    L[3][1::2],          L[-1][0]*L[2][1],
```

EXERCICE 2. (2 points)
Écrire un script qui demande deux nombres entiers à l'utilisateur et affiche tous les nombres impairs entre ces deux nombres.
Exemple:

```
>>>
 Saisir un entier: 3
 Saisir un entier: 11
3
5
7
9
11
```


9

Exercice 3. (2 points)
On considère le script suivant

```
n=int(input("entrer un nombre ? "))
while (n>0):
  print(n%10)
  n = n//10
```

1. Faire une table des valeurs de ce script pour $n = 45021$

n	$n > 0$	Ecran

2. Écrire un script qui affiche la somme des chiffres décimaux d'un entier n lu en entrée.

Exercice 4. (4 points)

1. Écrire un script qui calcule et affiche la somme des nombres pairs et la somme des nombres impairs d'une liste d'entiers `list_nbr` prédéfinie. Par exemple, pour la liste `list_nbr=[1,2,4,9,2,7]` le script calculera `1+9+7=17` et `2+4+2=8`.

2. La distance entre deux mots est le nombre de lettres en lesquelles ils diffèrent. Par exemple la distance entre `caste` et `vaste` vaut 1, celle entre `part` et `partir` vaut 2 et celle entre `crypte` et `egyptien` vaut 5. Écrire un script qui retourne la distance entre deux mots saisis par l'utilisateur.

Exercice 5. (4 points)
On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier.

1. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui retourne $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

2. Écrire une fonction `binomial(n,k)` qui retourne la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3. Écrire un script qui demande un entier n à l'utilisateur et affiche le polynome $(X+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}X + \cdots + \binom{n}{n-1}X^{n-1} + \binom{n}{n}X^n$.

   Par exemple, pour $n = 4$ le script affichera:

```
>>>
4
(X+1)^4 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1
```


10

EXERCICE 6. (6 points)

On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier. Un point du plan sera représenté par un tuple de deux flottants. Notons `P` un tel tuple, ses coordonnées x et y seront donc données respectivement par `P[0]` et `P[1]`. On définit la distance entre deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ par

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

1. Écrire l'instruction permettant d'importer la fonction `sqrt` du module `math`.

2. Écrire une fonction `Distance(P1,P2)` qui retourne la distance entre les points `P1` et `P2`.

3. On décide de représenter un cercle par une liste composé d'un point et d'un flottant représentant son rayon. Par exemple le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.5 sera représenté par $C = [(1, 0), 1.5]$.

   Écrire une fonction `EstDansCercle(P,C)` qui retourne `True` si le point `P` est à l'intérieur du cercle `C` (c'est-à-dire qu'il est à distance du centre inférieure ou égale au rayon) et `False` sinon.

4. On considère une liste de cercle `list_cercles` et un point `P` prédéfinis. Écrire un script qui affiche le cercle de plus petit rayon de la liste contenant le point `P`.

Contrôle de M12
19 juin 2018
Documents non autorisés

Exercice 1. On considère la distribution statistique donnée par le tableau suivant.

classes	Centres des classes, x_i	n_i	f_i	N_i	F_i	$n_i x_i$
[20.5; 25.5[		14				
[25.5; 30.5[		16				
[30.5; 35.5[		18				
[35.5; 40.5[		20				
[40.5; 45.5[		16				
[45.5; 50.5[		12				
[50.5; 55.5[		4				
Sommes						

1- Compléter le tableau statistique.

2- Tracer l'histogramme de cette distribution statistique ainsi que le polygone des fréquences.

3- Déterminer la moyenne, l'écart type, la classe modale, la médiane et la médiale.

4- Déterminer les coefficients de symétrie et d'aplatissement.

5- Déterminer l'indice de concentration de Gini.

6- Tracer la courbe de Gini.

Excercice 2. Un fabricant propose 2 modèles de lampes L1 et L2. Le modèle L1 a une durée moyenne de fonctionnement x_1 de 6 ans avec un écart type σ_1 de 2 ans. Le modèle L2 a une durée moyenne de fonctionnement x_2 de 5 ans avec un écart type σ_2 de 1 an.

Les 2 modèles L1 et L2 ont des distributions de durée de vie gaussiennes. On sait que pour cette distribution, près de 96 \% des observations (à peu près la totalité...) appartiennent à l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$.

A prix égal, lequel des 2 modèles L1 ou L2 achèteriez-vous ? Expliquez pourquoi.

Excercice 3. Le tableau de contingence suivant donne la relation entre le salaire mensuel X des 38 employés (d'une entreprise) et leur ancienneté Y.

Y X	[0; 5[	[5; 10[	[10; 15[	[15; 20[
[5000; 10000[	5	7	2	1
[10000; 15000[	3	4	3	3
[15000; 20000[	0	1	3	6

1- Déterminer les distributions marginales et calculer leurs moyennes et leurs écarts types.

2- Calculer le moment centré d'ordre (1,1) : $\mu_{1,1}(X, Y) := Cov(X,Y)$.

3- Les variables X et Y sont elles indépendantes ? Justifier.

4- Déterminer l'équation de la droite de régression et la tracer.

-13

Université de Toulon
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

2017/2018

MS22- Examen session 1
18 mai 2018

Question de cours :

Soient E et F deux espaces vectoriels.
Soit f une application linéaire de E dans F.
1) Démontrer que le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E et que l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.
2) En supposant que E et F sont de dimension finie, énoncer le théorème du rang pour f.
3) En supposant de plus que les dimensions de E et F sont égales, quelles sont les conséquences du théorème du rang pour f ?

Exercice 1

Soient a, b, c trois nombres réels distincts.
Soit P le polynôme en X défini, pour trois nombres réels donnés x, y, z, par
$P(X) = X^3 + xX^2 + yX + z$.
1) Montrer que, si (x, y, z) est solution du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} z + ay + a^2x + a^3 = 0 \\ z + by + b^2x + b^3 = 0 \\ z + cy + c^2x + c^3 = 0 \end{cases}$$

alors $P(X)$ est divisible par le polynôme $(X - a)(X - b)(X - c)$.
2) En déduire la solution du système.
3) Retrouver cette solution par une méthode directe.

Exercice 2

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal a 2.
Soit ϕ l'application de E dans E définie par : $\phi(P)= X^2P'' - XP'$.
1) Donner une base $\mathcal{B}$ de E.
2) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
3) Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
4) Déterminer une base du noyau de ϕ.
5) Déterminer une base de l'image de ϕ.

Exercice 3

Soit $E = \mathbf{R}^4$, muni de sa base canonique $\mathcal{C}_4$.
Soit F le sous-espace vectoriel de E défini par :
$F = \{(x, y, z, t) \in E / x - z + t = 0\}$
Soit f l'application de E dans E définie par :
$f(x, y, z, t) = (5x - 4z + 2t, -4x + y + 4z - 2t, 7x - 6z + 3t, 2x - 2z + t)$.
1) Soient $u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 1, 0, 0), u_3 = (-1, 1, -2, -1)$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de F . Quelle est la dimension de F ?
2) Montrer que f est un endomorphisme de E.
3) Montrer que $Ker(f) = Vect(u_4)$, où $u_4 = (0, 0, 1, 2)$.
4) Calculer le rang de f .
5) En déduire que $Im(f) = F$.
6) A-t-on $Ker(f) \oplus Im(f) = E$?
7) Soit g l'application de F dans F définie par $g(x) = f(x)\ \forall x \in F$.
Donner la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.
8) g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier.
9) Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.
Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
Donner la matrice de f dans cette base.
10) Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}_4$ vers la base $\mathcal{B}'$.
P est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse P^{-1}.
11) On note A (respectivement A') la matrice de f dans $\mathcal{C}_4$ (respectivement dans $\mathcal{B}'$).
Sans calculs, donner la relation entre A', A et P.

Exercice 4

Soient a et b réels.
Calculer le déterminant d'ordre n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a & b & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & a & b \\ b & 0 & . & . & 0 & a \end{vmatrix}$$

Université de Toulon
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

MS22- Examen session 2
2 juillet 2018

Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices, téléphones portables sont interdits.
Il sera tenu compte dans la notation de la clarté de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1

Décomposer dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme en X défini par $P(X) = X^4 + 1$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1) Soient les vecteurs v_1, v_2, v_3 définis par $v_1 = e_2 + e_3, v_2 = e_1 + e_3, v_3 = e_1 + e_2$.

i) Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

ii) Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

iii) Déterminer P^{-1}.

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par sa matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Déterminer la matrice A' de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

ii) Calculer $(A')^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

iii) Déduire de ce qui précède le calcul de A^n pour $n \in \mathbf{N}^*$.

3) Soient $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites réelles définies, pour $n \in \mathbf{N}$, par la donnée de x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 4y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 3z_n \end{cases}$$

Exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0.

Exercice 3

Pour a donné dans $\mathbf{R}$, soit f_a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par

$f_a(x, y, z) = (ax - y + z, x - y - az, -x + y - a^2 z)$.

1) Donner la matrice M_a de f_a relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2) Calculer le déterminant de M_a. Pour quelles valeurs de a f_a est-elle bijective ?

Pour (b_1, b_2, b_3) donné dans $\mathbf{R}^3$, on considère le système linéaire (S_a):

$$\begin{cases} ax - y + z = b_1 \\ x - y - az = b_2 \\ -x + y - a^2 z = b_3 \end{cases}$$

3) On suppose dans cette question que $a = 2$.

i) Déterminer la solution (x, y, z) de (S_2) en fonction de (b_1, b_2, b_3).

ii) En déduire la matrice inverse M_2^{-1} de M_2.

iii) En déduire l'expression de l'endomorphisme f_2^{-1}.

4) Pour $(b_1, b_2, b_3) = (1, -1, b)$, discuter suivant les valeurs de a et b l'existence et l'unicité des solutions de (S_a). Donner la solution quand elle existe.

5) Donner une base et la dimension de l'image et du noyau de f_1.

6) Même question pour f_{-1} et f_0.

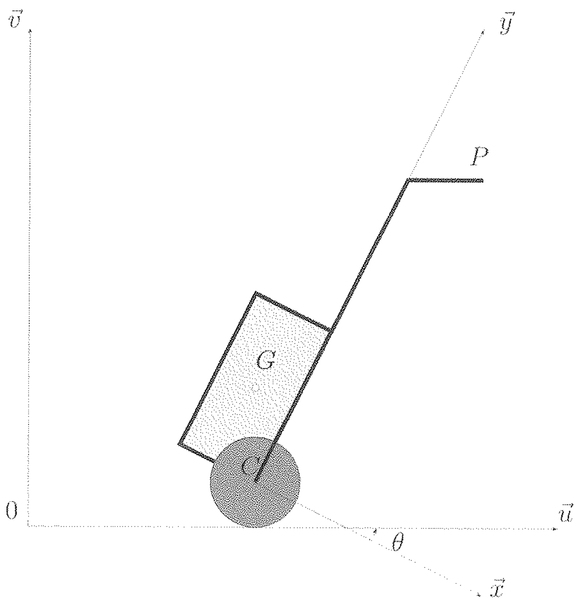
L1 MATHS

M23 Examen Mécanique Statique

Mai 2018

Exercice 1

Un diable est un outil permettant le transport de lourdes charges. On le modélise par un système (représenté dans la figure suivante) formé d'un solide plan $\mathcal{S}$ (le diable et la masse soulevée solidement attachés ensemble) et d'une roue $\mathcal{R}$ liée au solide S par un pivot parfait d'axe $(C, \vec{x})$. Le diable est posé sur le sol horizontal représenté par l'axe $(O, \vec{u})$. Il est incliné d'un angle θ (angle mesuré entre $\vec{x}$ et $\vec{u}$).



a) Rappeler **en une phrase** la condition d'équilibre d'un solide.

b) Rappeler **en une phrase** la condition d'équilibre d'un système de solides.

c) On note $\vec{F}$ la force exercée en C par $\mathcal{S}$ sur la roue $\mathcal{R}$. Justifier le fait que le torseur le torseur des efforts exercés par $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{R}$ a pour éléments de réduction en C : $[\vec{F}, \vec{0}]_C$. Ecrire le torseur des efforts exercés par $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{S}$.

d) On note $\vec{R}$ la réaction du sol sur la roue. Ecrire en C le torseur des efforts exercés par le sol sur $\mathcal{R}$.

e) Traduire l'équilibre de la roue (en tenant compte qu'elle a une masse m et que son centre de gravité est en C) et en déduire que $\vec{F}$ a pour direction $\vec{y}$.

Dans la suite on posera $\vec{F} = -F\vec{y}$. La géométrie du diable est telle que le centre de gravité G de $\mathcal{S}$ et la poignée P ont pour coordonnées dans le repère $(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, P : $(2a, 10a, 0)$, G : $(-a, 4a, 0)$ (avec $a = 10cm$). La masse de S est M.

f) Donner, en fonction de g et θ, les coordonnées de l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{v}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Que deviennent ces coordonnées lorsque le diable est vertical ($\theta = 0$)?

g) Calculer en C le torseur des efforts dus au poids de $\mathcal{S}$.

h) Calculer en C le torseur des efforts dus à la force $-T\vec{v}$ exercée en P par le manipulateur.

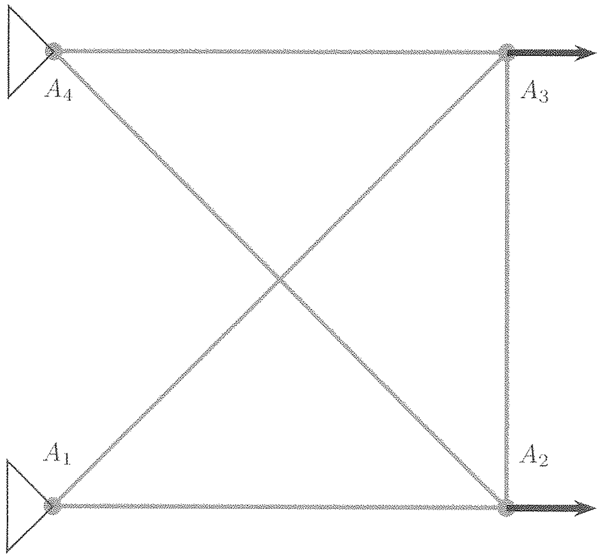
i) Traduire l'équilibre de $\mathcal{S}$ et en déduire la valeur de T en fonction de M, g et θ.

j) Pour quelle valeur de θ (on ne demande pas son calcul) la valeur de T est-elle nulle ? A quelle situation cela correspond-t-il ?

18

Exercice 2

On considère le treillis formé de 4 noeuds de coordonnées $A_1 : (-1,-1)$, $A_2 : (1,-1)$, $A_3 : (1,1)$, $A_4 : (-1,1)$ *et de 5 barres* $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$, $[A_3, A_4]$, $[A_1, A_3]$, $[A_2, A_4]$. *On suppose que les barres diagonales se croisent sans interagir. Les noeuds* A_1 *et* A_4 *sont des appuis fixes. En chacun des noeuds* A_2 *et* A_3 *on exerce une force* $F\vec{x}$.



a) Quel est le degré d'hyperstaticité de ce treillis ?

b) Ecrire le système statique.

c) Déterminer les tensions de toutes les barres en fonction de F et de la tension $T_{2,3}$ de la barre $[A_2, A_3]$.

d) Montrer que le choix $T_{2,3} = 0$ correspond à une solution évidente d'équilibre du treillis.

e) Calculer les allongements des 5 barres en fonction des (petits) déplacements (u_2, v_2) et (u_3, v_3) des noeuds A_2 et A_3.

f) Déterminer u_2 en fonction de l'allongement $\Delta\ell_{1,2}$ de la barre $[A_1, A_2]$. Déterminer v_2 en fonction de u_2 et de l'allongement $\Delta\ell_{4,2}$ de la barre $[A_4, A_2]$.

g) Déterminer de la même manière u_3 et v_3 en fonction des allongements $\Delta\ell_{4,3}$ et $\Delta\ell_{1,3}$ des barres $[A_4, A_3]$ et $[A_1, A_3]$.

h) En déduire l'équation de compatibilité

$$\Delta\ell_{1,2} + \Delta\ell_{4,3} + \Delta\ell_{2,3} - \sqrt{2}\Delta\ell_{1,3} - \sqrt{2}\Delta\ell_{4,2} = 0$$

i) On suppose que toutes les barres ont la même loi de comportement $T_{i,j} = k\frac{\Delta\ell_{i,j}}{\ell_{i,j}}$ liant leur tension $T_{i,j}$ à leur allongement $\Delta\ell_{i,j}$ et leur longueur $\ell_{i,j}$. Transformer l'équation obtenue à la question (h) en une équation portant sur les tensions. En déduire la valeur de $T_{2,3}$ puis les valeurs de toutes les tensions.

j) Tracer le treillis déformé sous l'action des forces (en exagérant les déplacements).

19

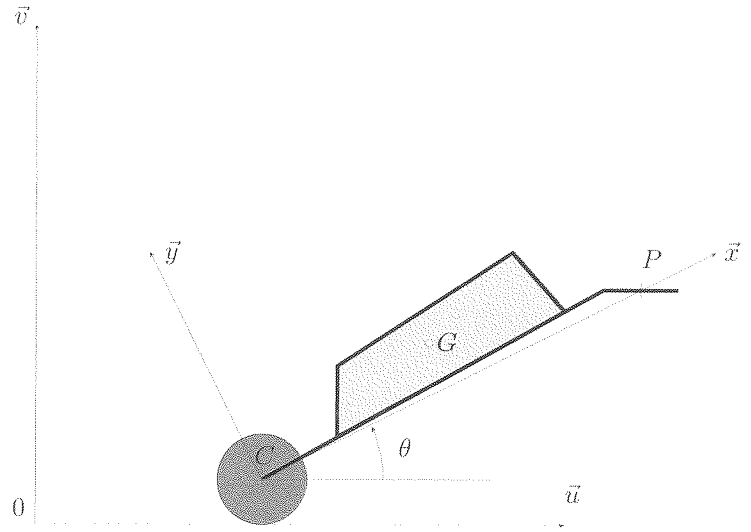
L1 MATHS.

M23 Examen Mécanique Statique

Juin 2018

Exercice 1

Une brouette est un outil permettant le transport de lourdes charges. On le modélise par un système (représenté dans la figure suivante) formé d'un solide plan $\mathcal{S}$ (la brouette et la masse supposés solidaires) et d'une roue $\mathcal{R}$ liée au solide S par un pivot parfait d'axe $(C, \vec{z})$. La brouette roule sur un sol horizontal représenté par l'axe $(O, \vec{u})$. L'inclinaison de la brouette est repérée par l'angle θ mesuré entre $\vec{u}$ et $\vec{x}$).



a) Rappeler **en une phrase** la condition d'équilibre d'un solide.

b) Rappeler **en une phrase** la condition d'équilibre d'un système de solides.

c) On note $\vec{F}$ la force exercée en C par $\mathcal{S}$ sur la roue $\mathcal{R}$. Justifier le fait que le torseur le torseur des efforts exercés par $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{R}$ a pour éléments de réduction en C : $[\vec{F}, \vec{0}]_C$. Ecrire le torseur des efforts exercés par $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{S}$.

d) On note $\vec{R}$ la réaction du sol sur la roue (on ne suppose **pas**, bien entendu, que le contact a lieu sans frottement). Ecrire au point de contact I le torseur des efforts exercés par le sol sur $\mathcal{R}$. Calculer son moment en C.

e) En tenant compte que la roue a une masse m et que son centre de gravité est en C, écrire en C le bilan des efforts exercés sur la roue puis écrire les équations d'équilibre.

f) En déduire que $\vec{R}$ a pour direction $\vec{v}$ puis que $\vec{F}$ a aussi pour direction $\vec{v}$.

Dans la suite on posera $\vec{F} = -F\vec{v}$. La géométrie de la brouette est telle que le centre de gravité G de $\mathcal{S}$ et la poignée P ont pour coordonnéees dans le repère $(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, $P : (0, 10a, 0)$, $G : (5a, a, 0)$, a tant une longueur fixée. La masse de S est M.

g) Donner, en fonction de g et θ, les coordonnées de l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{v}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Que deviennent ces coordonnées lorsque la brouette est à l'horizontale ($\theta = 0$)?

h) Calculer en C le torseur des efforts dus à la force $T\vec{v}$ exercée en P par le manipulateur.

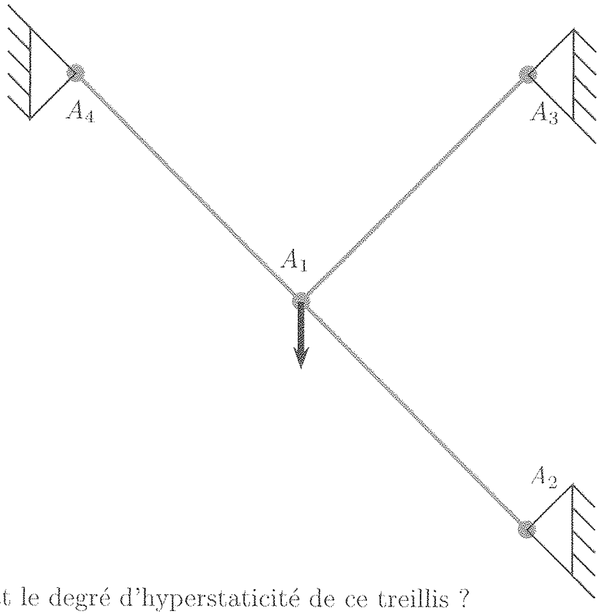
20

i) Calculer en C le torseur des efforts dus au poids de $\mathcal{S}$.

j) Ecrire le bilan des efforts exercés sur $\mathcal{S}$ et traduire son équilibre de $\mathcal{S}$. En déduire la valeur de T en fonction de M, g et θ.

Exercice 2

On considère le treillis formé de 4 noeuds de coordonnées $A_1 : (0,0)$, $A_2 : (1,-1)$, $A_3 : (1,1)$, $A_4 : (-1,1)$ *et de 3 barres* $[A_1, A_2]$, $[A_1, A_3]$, $[A_1, A_4]$*. Les noeuds* A_2, A_3 *et* A_4 *sont des appuis fixes. Au noeuds* A_1 *on exerce une force* $-F\vec{y}$*.*



a) Quel est le degré d'hyperstaticité de ce treillis ?

b) Ecrire le système statique.

c) Calculer les allongements $\Delta\ell_{1,i}$ des 3 barres $[A_1, A_i]$ en fonction du déplacement (u, v) du noeud A_1.

d) En déduire que les allongements doivent satisfaire l'équation de compatibilité

$$\Delta\ell_{1,2} + \Delta\ell_{1,4} = 0$$

e) On suppose que toutes les barres ont la même loi de comportement $T_{1,i} = k\frac{\Delta\ell_{1,i}}{\ell_{1,i}}$ liant leur tension $T_{1,i}$ à leur allongement $\Delta\ell_{1,i}$ et leur longueur $\ell_{1,i}$. Transformer l'équation obtenue à la question (e) en une équation portant sur les tensions.

f) En déduire les valeurs de toutes les tensions.

g) Préciser quelles sont les barres en tension et quelles sont celles en compression.

h) Tracer sur un même schéma le treillis initial et le treillis déformé sous l'action des forces (en exagérant les déplacements).