EXAMEN de MATHEMATIQUES, Janvier 2017, Licence 2ème année.
UE 32 **ALGEBRE LINEAIRE II.**

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé pour cette épreuve. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1. On désigne par $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré 2 à coéfficient réel. Soit

$$F = \{P \in E \quad \text{tels que} \quad \varphi(P) = P(0) + P'(1) = 0\},$$

P' désignant le polynôme dérivé de P.
1) Montrer que $\varphi \in E^*$.
2) Montrer ensuite que F est un sous espace vectoriel, quel est sa dimension ?
3)Donner une équation du sous espace F en terme de coordonnées relativement à la base canonique de E.
4) En déduire une base de F.
5) Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 2. On définit l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $\forall x = (x_1, x_2, x_3), \in \mathbb{R}^3$

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 16x_2x_3$$

1) Verifier que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.
2) Donner l'expression de la forme polaire associée, ϕ_q ainsi que sa matrice dans la base canonique.
3) Soit $F = \{u_1(1,1,1); u_2(1,1,0); u_3(1,0,0)\}$. Vérifier que F est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner ensuite la matrice associée à q dans cette base.
4)Décomposer q sous la forme d'une somme de carrés de forme linéaires indépendantes, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Quelle est la signature de q ? On vérifiera que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont linéairement indépendantes.
5) Déterminer une base $q-$ orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice associée à q dans cette base ?
6) Soit $a \in \mathbb{R}$, on note par $v_a = (a, 1, -1)$, on note par D_a la droite vectorielle engendrée par v_a. Déterminer $D_a^\perp$, ainsi que sa dimension.
7) A quelle condition sur a a-t-on $\mathbb{R}^3 = D_a \oplus D_a^\perp$?

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la forme quadratique, $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3.$$

1) Montrer que (E, q) est un espace euclidien.
2)En utilisant le procédé de Grahm-Schmidt, construire une base $q-$orthonormale.
3) Montrer que dans ce cas on a toujours que $E = D_a \oplus D_a^\perp$, ou D_a est défini dans l'exercice précedent.

1

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On considére l'endomorphisme f associé à la matrice

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

1)Montrer ensuite que f est un endomorphisme orthogonal.
2)Montrer sans calcul que f est diagonalisable, montrer que les valeurs propres de f satisfont $\lambda^2 = 1$
3)Calculer le sous espace propres de f associé à la valeur propre $\lambda = 1$.
4)Etablir que f est une symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel F que l'on déterminera
5) Calculer $F^{\perp}$
6) en déduire une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f, quelle la matrice de f dans cette base ?

UNIVERSITÉ DE TOULON

EXAMEN DE P311
Session 1 2016-2017

L2 MATHSP-L2 PC- L2 SI

COURS, TD et DOCUMENTS INTERDITS

CALCULATRICES AUTORISEES

PORTABLES STRICTEMENT ETEINTS

DUREE 2h

EXERCICE 1 *(5 points)*

Deux charges identiques q_0 sont fixées aux extrémités B et C de la base d'un triangle isocèle ABC, rectangle en A. On pose AB = AC = a.
Une troisième charge q_1 est fixée au milieu O du côté BC.

1) Donner l'expression de la force d'interaction de Coulomb entre deux charges, en explicitant – schéma à l'appui- chacune des grandeurs employées.

2) Déterminer la force résultante exercée par ces 3 charges sur une charge Q placée en A.

3) Pour quelle valeur de q_1 en fonction de q_0, cette force est-elle nulle ?
Application numérique : $q_0 = +2\ \mu C$.

EXERCICE 2 *(5 points)*

1) Donner les expressions des potentiel et champ électrostatiques élémentaires créés par un élément de longueur d'un fil uniformément chargé (densité linéique λ), en explicitant – schéma à l'appui- chacun des termes utilisés.

2) En appliquant les expressions précédentes, déterminer le potentiel et le champ électrostatiques résultants créés par un arc de cercle chargé uniformément (densité linéique : $-\lambda < 0$), de rayon R et de longueur 2L , en son centre O (on exprimera le champ en fonction du demi - angle au centre α dont on donnera la relation avec L et R).

3) Que deviennent ces expressions si $\alpha = \pi/2$? si $\alpha = \pi$?

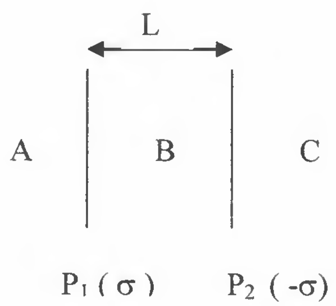
EXERCICE 3 *(7 points)*

1) Enoncer le théorème de Gauss.

2) Calculer le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini portant la densité superficielle de charge uniforme σ positive. Expliciter la méthode utilisée.

3) Deux plans infinis P_1 et P_2 sont parallèles, distants de L et séparent l'espace en 3 domaines A, B, C (voir figure). Ils portent respectivement les densités superficielles constantes σ et $-\sigma$.

31. Déterminer, en justifiant la méthode employée, le champ électrostatique créé par ces plans dans chaque domaine de l'espace. Préciser la direction et le sens des lignes de champ ainsi que la forme des équipotentielles.



32. Calculer la différence de potentiel entre les deux plans en fonction de σ , ε_0 et L. En déduire la capacité de ce condensateur plan.

EXERCICE 4 *(3 points)*

On rappelle le postulat de Biot et Savart $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$

1) Donner, schéma annoté à l'appui, la signification de chacun des termes du postulat. Préciser la direction et le sens de $\overrightarrow{dB}$ sur le schéma.

2) En utilisant la formule de Biot et Savart, établir l'expression du champ magnétique créé au centre O d'une bobine plate de N spires, de rayon R et parcourue par un courant continu d'intensité I. Préciser les caractéristiques du champ magnétique (direction, sens) sur un schéma. Application numérique : R = 2,5 cm, N = 50 et I = 50 mA.

UNIVERSITÉ DE TOULON

EXAMEN DE P311
Session 2 2016-2017

L2 MATHSP-L2 PC- L2 SI

COURS, TD et DOCUMENTS INTERDITS

CALCULATRICES AUTORISEES

PORTABLES STRICTEMENT ETEINTS

DUREE 2h

EXERCICE 1 *(5 points)*

Deux charges q_A = +3µC et q_B = - 1µC sont placées respectivement aux points A et B d'un axe Ox, d'abscisses x_A = -20 cm et x_B = +10cm.

1) Montrer, qu'en dehors des points situés à l'infini, le point P de l'axe Ox où le champ électrostatique créé par ces deux charges est nul se situe nécessairement au-delà de B.
2) Calculer l'abscisse de P.
3) Calculer le potentiel électrostatique au point P.
4) On place une charge q_0 = - 1µC au point O. Déterminer la force de Coulomb qu'elle subit, en précisant sa direction et son sens.

EXERCICE 2 *(4.5 points)*

On considère une circonférence, de rayon R, chargée uniformément avec une densité linéique λ >0 .

1) Calculer le potentiel électrostatique V(x) créé par le cercle chargé en un point M de son axe, d'abscisse x.
2) En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ (x) en M.
3) Tracer l'allure des graphes des fonctions E(x) et V(x).

EXERCICE 3 *(7 points)*

1) Un fil infini porte la densité linéique de charge constante $\lambda > 0$. Calculer le champ électrique qu'il crée en un point M situé à la distance r du fil en utilisant le théorème de Gauss (démarche détaillée demandée). Que devient cette expression quand on déplace le point M parallèlement au fil ?

2) Donner l'allure des lignes de champ ; en déduire celle des équipotentielles.

3) En utilisant la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, trouver l'expression du potentiel électrique créé par ce fil infini en tout point de l'espace, en prenant comme origine des potentiels un cylindre coaxial du fil chargé , de rayon r_0.

EXERCICE 4 *(3.5 points)*

On rappelle le postulat de Biot et Savart $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$

1) Donner, schéma annoté à l'appui, la signification de chacun des termes du postulat. Préciser la direction et le sens de $\overrightarrow{dB}$ sur le schéma.

2) Déterminer l'expression du champ magnétique créé par un fil de longueur L, parcouru par un courant d'intensité I, en un point O situé sur la médiatrice du fil à la distance d du fil. Préciser la direction et le sens du champ magnétique sur un schéma soigneusement annoté.

3) Calculer B pour d = L= 10cm et I = 2A