L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 4 janvier 2016

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée.
Autres documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 (Logique). On étudie la proposition suivante :

P : "*Si il fait sombre ou il fait nuit, alors tous les chats sont gris.*"

(1) Écrire la négation de cette proposition P.

(2) Écrire la contraposée de cette proposition P.

(3) On considère aussi la proposition

Q : "*Il ne fait pas nuit ou on voit bien la lune.*"

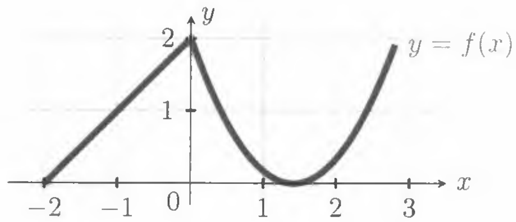
On suppose que les propositions P et Q sont vraies et que l'on voit un chat vert. Voit-on bien la lune ? Justifier.

Exercice 2 (Transformations sur le graphe). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

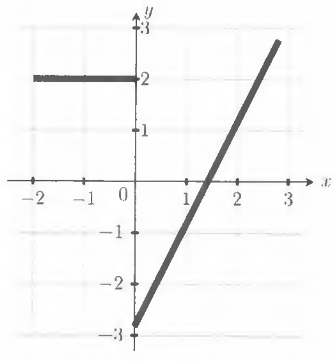
(1) $x \mapsto f(x+1)+3$,

(2) $x \mapsto -f(-x)$,

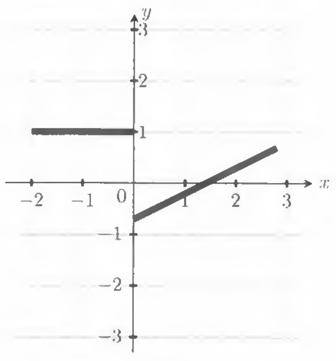
(3) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)-3$.



L'un des deux graphes ci-dessous correspond-il au graphe de la dérivée de f ?



(A)



(B)

réponses possibles (justifier son choix) :

- *(A),*
- *(B),*
- *"aucun des deux".*

Exercice 3 (Suite). On considère la suite récurrente $(p_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} p_2 = 0, \\ \forall n \geq 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{2}(2-p_n) \end{cases}$$

(1) Calculer p_1 et p_0.

(2) La suite (p_n) est-elle une suite arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre ?

(3) Pour tout $n \geq 0$ on pose $q_n = p_n - \frac{2}{3}$. Démontrer que (q_n) est une suite géométrique.
(4) Calculer, si elle existe, la limite de la suite $(p_n)_{n \geq 0}$.
(5) Pour $n \geq 0$ calculer $u_n = q_0 + q_1 + \ldots + q_n$, puis $\lim\limits_{n \to \infty} q_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction). Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

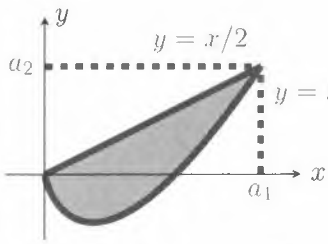
$$f(x) = x^2 + \ln(e^x + 1)$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer les limites de f aux extrémités de son domaine de définition.
(2) Calculer la dérivée f' de f et la dérivée seconde f'' de f.
En remarquant que f'' est aussi la dérivée de f', démontrer que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'annule en exactement un point x_0 : on ne demande pas de calculer ce point, pour la suite on prendra $x_0 \simeq -0,4$.
(3) Donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(4) Déterminer, s'il y en a, les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\ln(2)$.
(6) Tracer la courbe représentative de f. On prendra $f(x_0) \simeq 0,6$, $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.

Exercice 5 (Calcul intégral). On considère la région plane P définie par:

$$P = \left\{(x, y) \ : \ x \geq 0, \ x \ln(x) \leq y \leq \frac{x}{2}\right\}$$

et représentée en gris sur le graphique suivant :



Dans cet exercice, on prolonge la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ par continuité en 0 en admettant que $0 \ln(0) = 0$.

(1) Calculer les coordonnées $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ du point d'intersection de la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ avec la courbe d'équation $y = x\,ln(x)$.
(2) Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^{a_1} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{a_1} x \ln(x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra intégrer par parties pour cette dernière intégrale).
(3) Calculer la surface de la région P.

I11: Contrôle terminal
Licence 1 MATHS, PC, SI

Janvier 2017 (semestre 1) - Durée : 2h00

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits.
- Le barême est donné à titre indicatif
- Tous les scripts devront être clairement indentés et les noms de variables choisis de façon appropriée.
- Seules les instructions et fonctions internes à Python **vues en cours** sont autorisées.

EXERCICE 1. (2 points)
On considère les déclarations de variables suivantes:

```
pi=3.1415
L=["ex", pi, (1,2,3), ["4","5","6","7","8","9"]]
```

Donner le type et la valeur des expressions suivantes:

```
L[1],       L[0]+str(l[1]),   L[3][0]+l[3][-1][0],
L[2][:2],   L[3][1::2],       L[-1][0]*l[2][1],
```

EXERCICE 2. (2 points) Écrire un script qui demande deux nombres entiers à l'utilisateur et affiche tous les nombres pairs entre ces deux nombres.

Exemple:

```
>>>
 Saisir un entier: 2
 Saisir un entier: 10
2
4
6
8
10
```


3

Exercice 3. (2 points)
On considère le script suivant :

```
ch1=input("Entrer une chaine de caracteres: ")
ch2=input("Entrer une chaine de caracteres: ")
i=0
j=0
trouve=False
while i<len(ch1) and trouve==False:
  if ch1[i]==ch2[j]:
    j=j+1
  else:
    j=0
  if j==len(ch2):
    trouve=True
  i=i+1
print(trouve)
```

Faire une table des valeurs de ce script pour les entrées `ch1="bonjour a tous!"` et `ch2="our"` sur le modèle suivant:

i	j	ch1[i]	ch2[j]	i<len(ch1) and trouve==False	ch1[i]==ch2[j]	trouve

Exercice 4. (4 points)

1. Écrire un script qui calcule la moyenne d'une série de nombres saisie par l'utilisateur; la saisie s'arrête quand un nombre négatif est rentré.

   Exemple:

   ```
   >>>
    Saisir un nombre: 2
    Saisir un nombre: 10
    Saisir un nombre: 0
    Saisir un nombre: 15
    Saisir un nombre: -5
    Moyenne: 6.75
   ```

2. La distance entre deux mots est le nombre de lettres en lesquelles ils diffèrent. Par exemple la distance entre `caste` et `vaste` vaut 1, celle entre `part` et `partir` vaut 2 et celle entre `crypte` et `egyptien` vaut 5. Écrire un script qui retourne la distance entre deux mots saisis par l'utilisateur.

4

3. On rapelle qu'en Python une matrice est simplement une liste de listes de nombres.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{array}{lll} \texttt{[[1,} & \texttt{2,} & \texttt{3],} \\ \texttt{[4,} & \texttt{5,} & \texttt{6],} \\ \texttt{[7,} & \texttt{8,} & \texttt{9]]} \end{array}$$

Écrire un script qui calcule la transposée d'une matrice prédéfinie `m`, c'est à dire qui inverse les lignes et les colonnes. Par exemple, la transposée de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

En python, la transposée de la matrice `[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]` est `[[1,4,7],[2,5,8],[3,6,9]]`.

Exercice 5. (3 points)
On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier.

1. Écrire une fonction `factoriel(n)` qui retourne la valeur $n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots (n-1) \times n$ (par convention $0! = 1$).

2. Écrire une fonction `sh(x,n)` qui retourne le flottant

$$sh(x,n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(On pourra utiliser l'opérateur puissance de Python: `**`).

3. On admettra que la fonction `sh(x,n)` est une approximation de la fonction sinus hyperbolique `sinh(x)` quand n tend vers l'infini.

Écrire un script qui demande un entier p à l'utilisateur et affiche la plus petite valeur de n telle que |`sh(1,n)-sinh(1)`| $< 10^{-p}$ où `sinh` est une fonction du module `math` qu'il faudra importer dans votre script.

5

Exercice 6. (5 points)

On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier. Un étudiant sera représenté en Python par un tuple contenant son nom ainsi qu'un liste de notes. Par exemple `("Thierry", [5,12,13,8,20])`. Une promotion sera représentée par une liste d'étudiants.

1. Écrire une fonction `ind_minmax(l)` qui retourne un couple composé des indices du minimum et du maximum de la liste non vide d'entiers `l`. Par exemple `[10,8,10,14,14]` retournera `(1,3)`.

2. Écrire une fonction `moyenne(l)` qui retourne la moyenne arangée des notes de la liste `l` c'est-à-dire la moyenne en ommettant la meilleure et la pire note (attention, si la meilleure ou la pire note apparaissent plusieurs fois, elles ne seront ommises qu'une fois). Par exemple `moyenne([0,10,12,14,14])` retournera 12.

3. Écrire une fonction `major(promo)` qui retourne le nom de l'étudiant de la promotion `promo` ayant la meilleure moyenne arangée.

Exercice 7. (2 points) Écrire un script qui permet de compter et d'afficher le nombre d'occurences des bigrammes d'une chaine de caractères prédéfinie. On rappelle qu'un bigramme est suite de deux caractères: le mot `chose` contient les bigrammes `ch`,`ho`,`os`,`se`.

Exemple: Pour la chaîne `AATATGCAAT` le script affichera:

```
AA: 2
AT: 3
TA: 1
TG: 1
GC: 1
CA: 1
```

I11: Contrôle terminal
session 2
Licence 1 MATHS, PC, SI

Juin 2017 (session 2) - Durée : 2h00

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits.
- Le barême est donné à titre indicatif
- Tous les scripts devront être clairement indentés et les noms de variables choisis de façon appropriée.
- Seules les instructions et fonctions internes à Python **vues en cours** sont autorisées.

EXERCICE 1. (2 points)
On considère les déclarations de variables suivantes:

```
pi=3.1415
L=["ex", pi, (1,2,3), ["4","5","6","7","8","9"]]
```

Donner le type et la valeur des expressions suivantes:

```
L[1],       L[0]+str(L[1]),     L[3][0]+L[3][-1][0],
L[2][:2],   L[3][1::2],         L[-1][0]*L[2][1],
```

EXERCICE 2. (2 points)
Écrire un script qui demande deux nombres entiers à l'utilisateur et affiche tous les nombres impairs entre ces deux nombres.
Exemple:

```
>>>
 Saisir un entier: 3
 Saisir un entier: 11
3
5
7
9
11
```


7

EXERCICE 3. (2 points)
On considère le script suivant

```
n=int(input("entrer un nombre ? "))
while (n>0):
  print(n%10)
  n = n//10
```

1. Faire une table des valeurs de ce script pour $n = 45021$

n	$n > 0$	Ecran

2. Écrire un script qui affiche la somme des chiffres décimaux d'un entier n lu en entrée.

EXERCICE 4. (4 points)

1. Écrire un script qui calcule et affiche la somme des nombres pairs et la somme des nombres impairs d'une liste d'entiers `list_nbr` prédéfinie. Par exemple, pour la liste `list_nbr=[1,2,4,9,2,7]` le script calculera 1+9+7=17 et 2+4+2=8.

2. La distance entre deux mots est le nombre de lettres en lesquelles ils diffèrent. Par exemple la distance entre `caste` et `vaste` vaut 1, celle entre `part` et `partir` vaut 2 et celle entre `crypte` et `egyptien` vaut 5. Écrire un script qui retourne la distance entre deux mots saisis par l'utilisateur.

EXERCICE 5. (4 points)
On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier.

1. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui retourne $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

2. Écrire une fonction `binomial(n,k)` qui retourne la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3. Écrire un script qui demande un entier n à l'utilisateur et affiche le polynome $(X+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}X + \cdots + \binom{n}{n-1}X^{n-1} + \binom{n}{n}X^n$.
   Par exemple, pour $n = 4$ le script affichera:

```
>>>
4
(X+1)^4 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1
```


8

Exercice 6. (6 points)

On considère que le script et les fonctions suivantes sont écrits dans le même fichier. Un point du plan sera représenté par un tuple de deux flottants. Notons `P` un tel tuple, ses coordonnées x et y seront donc données respectivement par `P[0]` et `P[1]`. On définit la distance entre deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ par

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

1. Écrire l'instruction permettant d'importer la fonction `sqrt` du module `math`.

2. Écrire une fonction `Distance(P1,P2)` qui retourne la distance entre les points `P1` et `P2`.

3. On décide de représenter un cercle par une liste composé d'un point et d'un flottant représentant son rayon. Par exemple le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.5 sera représenté par $C = [(1, 0), 1.5]$.

   Écrire une fonction `EstDansCercle(P,C)` qui retourne `True` si le point `P` est à l'intérieur du cercle `C` (c'est-à-dire qu'il est à distance du centre inférieure ou égale au rayon) et `False` sinon.

4. On considère une liste de cercle `list_cercles` et un point `P` prédéfinis. Écrire un script qui affiche le cercle de plus petit rayon de la liste contenant le point `P`.

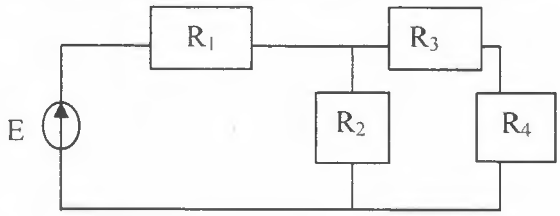
UNIVERSITÉ SUD TOULON VAR

Faculté des Sciences et Techniques
Année 2016-2017 - $2^{ème}$ Session
Aucun document autorisé
Portables éteints
Calculatrice autorisée

L1 BIO-PC-M-SI
Epreuve P111

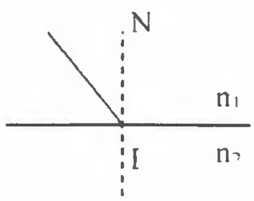
Electrocinétique (6 points)

Un étudiant a monté en TP un générateur dont la f.e.m. est réglée à E = 48V pour alimenter quatre résistances $R_1 = 48\Omega$; $R_2 = 80\Omega$; $R_3 = 50\Omega$ et une résistance inconnue R_4, sur une table de câblage en respectant le schéma électrique ci-dessous.



1) On lui demande de mesurer l'intensité délivrée par ce générateur. Refaire un schéma précisant la position et la façon de monter l'ampèremètre nécessaire à cette mesure.
2) L'ampèremètre affiche 500mA. Que peut-il déduire de la valeur de cette intensité ? En appliquant quelle loi ?
3) Exprimer la résistance équivalente au montage en fonction de R_4 et calculer sa valeur.
4) En utilisant la division de courant, calculer l'intensité qui circule dans R_4.

Optique I *(2 points)*



Un rayon incident tombe a la surface de séparation de deux milieux d'indices $n_1 = 1{,}6$ et $n_2 = \frac{4}{3}$.

1) Le rayon va se réfracter en s'éloignant ou en se rapprochant de la normale IN?
2) Le rayon d'incidence 0° est-il dévié ?
3) Calculer l'angle de réfraction correspondant à une incidence de 36°.
4) Calculer l'angle d'incidence correspondant à une réfraction de 89°
5) Que se passe-t-il pour un rayon d'incidence 60° ?

Optique II *(4 points)*

1) Où doit-on placer un objet pour que son image à travers une lentille convergente (de distance focale image f') soit virtuelle ?

2) A quelle(s) distance(s) d'un objet faut-il placer une lentille divergente de distance focale f ' = - 6 cm pour obtenir une image de dimension double de celle de l'objet ? Préciser la nature de l'objet.

3) On associe une lentille L_1 de vergence -10 δ et de centre O_1 à une lentille L_2 de distance focale $f_2' = 5$ cm et de centre O_2. La lentille L_2 est située à 20 cm à droite de la lentille L_1. Construire **sur un même schéma** les rayons issus d'un objet AB situé à 5 cm à droite de la lentille L_1 permettant d'obtenir A_1B_1 (image de AB à travers L_1) puis A'B' (image de A_1B_1 à travers L_2) [*on recommande de prendre pour échelle horizontale 1:2*].

Mécanique *(8 points)*

1) Un cycliste s'est mis au défi de parcourir 120 km en moins de 4 heures, mais son circuit est très vallonné et il réalise qu'il lui a déjà fallu une heure quarante pour faire le premier quart du parcours. Quelle devra être sa vitesse moyenne minimum sur le restant du parcours s'il veut réaliser son défi ?

2) Un cheval de trait tire un tronc d'arbre ayant une masse de 400 kg sur une pente légèrement descendante, inclinée de 10°. La corde qui relie le tronc au cheval forme un angle θ=20° par rapport à la surface du sol. Les forces de frottement entre le tronc et le sol sont de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse et k le coefficient de frottement avec k=434 $N.s.m^{-1}$ (on donne l'accélération de pesanteur g=9,81 $m.s^{-2}$).

a- Représenter sur un schéma l'ensemble des forces extérieures qui s'exercent sur le tronc d'arbre en respectant leurs points d'application respectifs.

b- Si le cheval exerce une force de 200 N sur la corde, quelle sera l'accélération du tronc (initialement immobile) à l'instant où le cheval commence à tirer sur la corde ?

c- Le tronc atteindra-t-il ensuite une vitesse limite et si oui, calculer cette vitesse limite.

3) Deux enfants jouent dans la cour d'un immeuble. Le premier lance vers le haut une balle depuis le jardin avec une vitesse initiale v_0^A, le deuxième, situé au 6^e étage (20 m de haut) lâche au même moment une autre balle sans vitesse initiale. A partir de la RFD, déterminer la vitesse avec laquelle le premier enfant doit lancer la balle vers le haut pour que les deux balles retombent au même moment ?

Université de Toulon
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

2016/2017

L1 MS22 - Examen session 1
12 mai 2017

Les documents, les notes personnelles, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés pour cette épreuve.

Question de cours :

Enoncer précisément la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}$.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X + 1$.

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

Exercice 2

1) Résoudre suivant $\lambda \in \mathbf{R}$ le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = \lambda x \\ x \qquad\qquad = \lambda y \\ \quad y \qquad\quad = \lambda z \end{cases}$$

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Ecrire l'image d'un vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$.
b) Déterminer $Ker f$ et $Im f$.
f est-elle injective, surjective, bijective ?
3) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On note $E_\lambda = \{u \in \mathbf{R}^3 / f(u) = \lambda u\}$.
a) Vérifier que E_λ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
b) Déterminer les 3 valeurs $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ de λ pour lesquelles $E_\lambda \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$.
c) Donner une base $\mathcal{B}_1$ de E_{λ_1}, une base $\mathcal{B}_2$ de E_{λ_2} et une base $\mathcal{B}_3$ de E_{λ_3}.
d) Montrer que la concaténation de ces 3 bases est une base de $\mathbf{R}^3$, que l'on note $\mathcal{B}'$.
e) Ecrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3

On note $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

Soit f l'application définie sur E par $f(P) = \frac{1}{2}\left[P(\frac{X}{2}) + P(\frac{X+1}{2})\right]$.

Soit ϕ l'application de E dans $\mathbf{R}$ définie par $\phi(P) = P(1)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
3) f est-elle injective, surjective, bijective ?
4) Déterminer une base de $Ker\phi$ et sa dimension.
5) ϕ est-elle injective, surjective, bijective ?

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{B}'$ la famille de E définie par $\mathcal{B}' = (1, 1-2X, 1-6X+6X^2)$.

6) Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
7) Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
8) Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
9) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
10) Déterminer $PA'P^{-1}$.
11) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Expliciter les 9 coefficients de M^n.
12) On pose $Q = a + bX + cX^2$, avec a, b, c réels.
Calculer $f^n(Q)$ en fonction de a, b, c pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4

Soit $a \in \mathbf{R}^*$.

1) Soient les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 & 1/a^3 \\ a & 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a^2 & a & 0 & 1/a \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Montrer qu'ils sont égaux, puis les calculer.

2) Généraliser à l'ordre n.

Université de TOULON
UFR Sciences et Techniques

Année Universitaire 16-17

L1 Math-PC

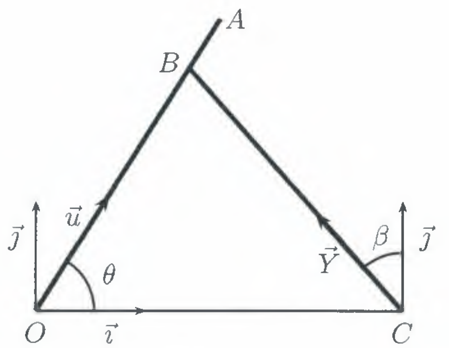
MECANIQUE STATIQUE - MODULE M23
Examen de Mai 2017

L'utilisation des calculatrices est interdite.

Les deux exercices proposés sont indépendants

Exercice 1 : Etude d'un équilibre

Relativement au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où $\vec{\jmath}$ désigne la verticale ascendante, on considère un système Σ situé dans le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par $\vec{g} = -g\,\vec{\jmath}$ l'accélération de la pesanteur.
Le système Σ est constitué de deux barres homogènes OA et BC de même longueur ℓ et de même masse m.
La barre OA est en liaison pivot d'axe $\vec{k}$ avec le bâti. G_1 désigne son milieu. On note $\vec{u}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{OA} = \ell\,\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe. On désigne par θ l'angle $(\vec{\imath}, \vec{u})$.
La barre BC est en liaison pivot d'axe $\vec{k}$ avec le bâti. G_2 désigne son milieu. On note $\vec{Y}$ le vecteur tel que $\overrightarrow{CB} = \ell\,\vec{Y}$. On désigne par β l'angle $(\vec{\jmath}, \vec{Y})$.
Les deux barres sont en contact ponctuel en B ; on note $\overrightarrow{OB} = x\,\vec{u}$. La réaction en B exercée par la barre BC sur la barre OA sera notée $\vec{R}_B = T_B\,\vec{u} + N_B\,\vec{v}$.



1. Exprimer en O le torseur des efforts exercés sur la barre OA.
2. Exprimer en C le torseur des efforts exercés sur la barre BC.
3. Écrire la condition d'équilibre du système Σ. En déduire que :

$$N_B = \frac{mg\ell}{2x}\cos(\theta), \quad T_B = \frac{mg}{2}\left(\frac{\ell}{x}\cos(\theta)\tan(\theta-\beta) - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\theta-\beta)}\right).$$

4. On suppose désormais que $\theta = \beta = \dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Quelle est la nature du triangle OBC. En déduire que $\dfrac{\ell}{x} = \sqrt{3}$.
   (b) On suppose que le contact en B entre les deux barres s'effectue suivant une loi de Coulomb de coefficient de frottement f. Quelle condition doit satisfaire f pour que le système Σ soit à l'équilibre ?

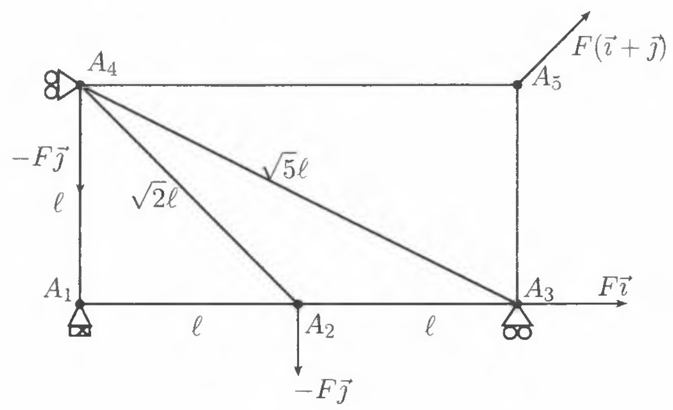
Exercice 2 : Etude d'un treillis

Dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le treillis élastique plan schématisé ci-dessous. Toutes les barres ont la même section S. **Le module d'Young de la barre A_3A_4 est égal à** $\sqrt{5}\,E$, tandis que celui de toutes les autres barres est égal à E.

Le noeud A_1 est en appui fixe, le noeud A_3 est mobile dans la direction $\vec{\imath}$, le noeud A_4 est mobile dans la direction $\vec{\jmath}$, et les noeuds A_2 et A_5 sont mobiles.

La barre A_2A_4 est de longueur $\sqrt{2}\ell$, la barre A_3A_4 est de longueur $\sqrt{5}\ell$, toutes les autres barres sont de longueur ℓ.

Une charge $-F\,\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_2, une charge $F\vec{\imath}$ est appliquée au noeud A_3, une charge $-F\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_4 et une charge $F\,(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ est appliquée au noeud A_5.



On note T_{ij} la tension qui règne dans la barre A_iA_j. Dans cet exercice on ne cherchera pas à calculer les réactions aux appuis.

1. Rappeler la loi de comportement en élasticité linéaire.
2. Donner le degré de staticité du treillis (justifier la réponse).
3. Rappeler la définition du système cinématique. Ecrire les équations du système cinématique et exprimer les déplacements aux noeuds en fonction des tensions qui règnent dans les barres. des barres.
4. Montrer que $2T_{12} + 2T_{23} + T_{14} = \sqrt{5}T_{34}$

   Comment s'appelle cette relation. A quoi sert-elle ?
5. Rappeler la définition du système statique. En écrire les équations. En déduire les tensions dans les barres. Préciser pour chacune d'entre elles si elles sont en traction ou en compression.
6. Exprimer alors les déplacements des noeuds en fonction de F, ℓ, E et S.

Université de TOULON et du VAR Année Universitaire 16-17
Faculté des Sciences et Techniques

L1 Math L1 PC

MECANIQUE STATIQUE - MODULE M23
Examen de Juin 2017

L'utilisation des calculatrices est interdite.

Les deux exercices proposés sont indépendants

Exercice 1 : Etude d'un équilibre

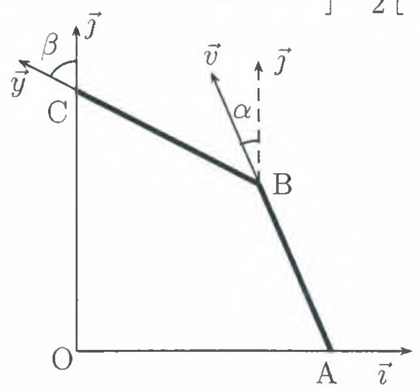
Relativement au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (avec $\vec{\jmath}$ vertical ascendant), $\vec{g}=-g\vec{\jmath}$ désigne l'accélération de la pesanteur. On considère l'équilibre d'un système Σ situé dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Σ est constitué de deux barres homogènes de même masse m et de longueur ℓ.

Les deux barres $\mathcal{B}_1$ (d'extrémités A et B) et $\mathcal{B}_2$ (d'extrémités B et C) sont liées par une liaison sphérique en B.

Le point A est en contact avec l'axe $O\vec{\imath}$ tandis que le point C est en contact avec l'axe $O\vec{\jmath}$. On note $T\vec{\imath}+N\vec{\jmath}$ la réaction du sol sur $\mathcal{B}_1$ et $P\vec{\imath}+Q\vec{\jmath}$ la réaction sur $\mathcal{B}_2$ en C. Ces contacts obéissent à une loi de Coulomb de coefficient f.

On introduit $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AB}=\ell\vec{v}$ et $\vec{y}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{BC}=\ell\vec{y}$.

On désigne par α l'angle $(\vec{\jmath},\vec{v})$ mesuré autour de $\vec{k}$ et par β l'angle $(\vec{\jmath},\vec{y})$ mesuré autour de $\vec{k}$. On suppose que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.



1. Rappeler la condition d'équilibre d'un solide et la condition d'équilibre d'un système de solides.
2. Ecrire au point B le torseur des efforts qui s'exercent sur la barre $\mathcal{B}_1$ et le torseur des efforts qui s'exercent sur le système.
3. Ecrire les équations d'équilibre du système Σ.
4. Montrer que l'équilibre du système est impossible si $\alpha=\beta$.

16

5. On suppose que $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ et que $Q = 0$
   a. Déterminer dans ce cas les valeurs de N, T, P et β.
   b. Rappeler la loi de Coulomb et donner une condition sur le coefficient de frottement f pour qu'un équilibre soit possible.

Exercice 2 : Etude d'un treillis

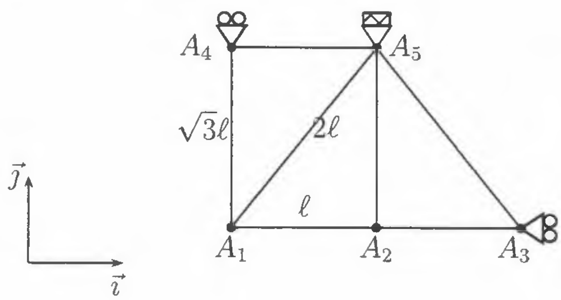
Dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le treillis élastique plan schématisé ci-dessous. Toutes les barres ont la même section S. **Le module d'Young de la barre A_1A_4 est égal à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}E$, tandis que celui de toutes les autres est égal à E.**

Le noeud A_1 est fixe, le noeud A_2 est mobile dans la direction $\vec{\jmath}$, le noeud A_5 est mobile dans la direction $\vec{\imath}$ et les noeuds A_3 et A_4 sont mobiles.

Les barres A_1A_2, A_2A_3 et A_4A_5 sont de longueur ℓ, les barres A_1A_4 et A_2A_5 sont de longueur $\sqrt{3}\ell$ alors que les barres A_1A_5 et A_3A_5 sont de longueur 2ℓ.

On note T_{ij} la tension qui règne dans la barre A_iA_j. Dans cet exercice on ne cherchera pas à calculer les réactions aux appuis.

Une charge $\vec{F_1} = -F\vec{\imath} - \sqrt{3}F\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_1, une charge $\vec{F_2} = F\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_2, une charge $\vec{F_3} = -2F\vec{\jmath}$ est appliquée au noeud A_3 et enfin une charge $\vec{F_4} = -\dfrac{F}{2}\vec{\imath}$ est appliquée au noeud A_4.



1. Rappeler la loi de comportement en élasticité linéaire.
2. Donner le degré de staticité du treillis (justifier la réponse).
3. Rappeler la définition du système cinématique. Ecrire les équations du système cinématique et exprimer les déplacements aux noeuds en fonction des tensions qui règnent dans les barres. des barres.
4. Montrer que $T_{23} + T_{12} + 2\sqrt{3}T_{14} = 4T_{15}$
   Comment s'appelle cette relation. A quoi sert-elle ?
5. Rappeler la définition du système statique. En écrire les équations. En déduire les tensions dans les barres. Préciser pour chacune d'entre elles si elles sont en traction ou en compression.
6. Exprimer alors les déplacements des noeuds en fonction de F, ℓ, E et S.

17

UNIVERSITÉ DU SUD TOULON VAR

Faculté des Sciences et Techniques
Année 2016-2017 - 2eme Session
Aucun document autorisé
Portables éteints
Calculatrice autorisée

L1 PC-M
Epreuve P211

Questions de cours *(4 points)*

1- Énoncer le théorème du moment cinétique (TMC) en définissant très précisément chacune des grandeurs employées.

2- Démontrer le TMC à partir de la relation fondamentale de la dynamique (RFD)

3- Démontrer que, dans le cas d'un système soumis à une force centrale, le TMC prend une forme particulière.

4- Énoncer les trois lois de conservation pour un système isolé.

Exercice A : *(2 points)*

On accroche une boule d'acier d'une tonne à une grue mécanique par une chaîne de 3 m de long afin de détruire un bâtiment. Si la grue permet à la boule un mouvement de balancier de 40° de part et d'autre de la verticale, à quelle vitesse maximale, en km/h, la boule d'acier peut-elle frapper le mur à démolir ?

Exercice B *(4 points)*

Un enfant est suspendu par une corde à un tourniquet qui tourne à vitesse constante.

1- Trouver les grandeurs physiques dont dépend l'angle que fait la corde avec la verticale.

2- Proposer des valeurs plausibles pour ces grandeurs

3- Déterminer la relation qui lie l'angle à ces grandeurs

4- Effectuer l'application numérique à partir de vos valeurs.

Exercice C : *(4 points)*

Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k. Elle est plongée dans un liquide de coefficient de viscosité η et soumise alors à une force de frottement fluide $\vec{f}$ donnée par la formule de Stokes : $\vec{f} = 6\pi\eta r\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables sur la sphère, la période des oscillations est T_0.

1- Déterminer l'expression du ***coefficient d'amortissement*** λ en fonction de m, r, T_0 et et de la pseudo-période T des oscillations dans le fluide (on rappelle la relation $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$)

2- Déterminer l'expression du ***coefficient de viscosité η*** en fonction de m, r, T_O et de la pseudo-période T des oscillations dans le fluide.

3- On réalise une expérience afin de mesurer le coefficient de viscosité de la glycérine. On suspend pour cela une bille de rayon 1 cm en plomb (densité $d = 11{,}35$) à l'extrémité d'un ressort et immergée dans la glycérine. On mesure une période de 0.91 s et une pseudo-période de 1 s. Calculer la valeur du ***coefficient de viscosité η de la glycérine*** en précisant son ***unité*** (on ne tient pas compte de la poussée d'Archimède).

Exercice C : *(6 points)*

1- Un satellite de masse $\mathrm{m} = 800\ \mathrm{kg}$ est **stocké dans un hangar** (sur Terre !) situé à une latitude $\lambda = 40°$.

a) Préciser son mouvement dans un référentiel géocentrique.

b) Exprimer sa vitesse v_O et son énergie cinétique Ec_O, dans le référentiel géocentrique, en fonction de m , R, λ, T_O. Déterminer la valeur de v_O.

c) En déduire l'expression de l'énergie mécanique totale E_O. Déterminer la valeur de E_O.

2- Le satellite est placé en orbite circulaire autour de la Terre.

a) Faire l'étude du satellite dans le référentiel géocentrique et déterminer, en utilisant le principe fondamental de la dynamique, la relation entre le rayon r de l'orbite et la vitesse v du satellite. Montrer que cette relation peut s'écrire : $v = \sqrt{\frac{g_O R^2}{r}}$ avec $g_O = G(R)$ champ de gravitation à la surface de la Terre.

b) Déduire l'expression de la période T de révolution en fonction du rayon r , $\mathrm{g_O}$ et R.

c) Exprimer l'énergie cinétique E_C et l'énergie potentielle E_P. En déduire l'expression de l'énergie totale E en fonction de m, r, $\mathrm{g_O}$ et R.

3: Le satellite est envoyé en orbite géostationnaire de rayon $\mathbf{r_1}$

a) En déduire la valeur de sa période de révolution T_1 dans le référentiel géocentrique.

b) Exprimer et calculer le rayon r_1 et l'altitude z_2 du satellite géostationnaire.

c) Exprimer et calculer la vitesse v_1 et l'énergie E_1 du satellite géostationnaire

<u>Données</u> :•Masse de la Terre $M = 6\ 10^{24} kg$, rayon de la Terre $R = 6\ 400\ km$, constante de gravitation universelle $G = 6{,}67\ 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$, période de rotation de la Terre (dans le référentiel géocentrique) $T_O = 86\ 164\ s$.

I21: Algorithmique
Contrôle terminal - session 1
Licence 1 MATHS, SI

2017 (semestre 2) - Durée : 2h00

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits.
- Le barême est donné à titre indicatif
- Toutes les réponses doivent être justifiées

EXERCICE 1. (3 points)
Pour chaque paire de fonctions f et g, dire si $f = O(g)$, $g = O(f)$ et $f = \Theta(g)$:

1. $f(n) = n\log(n^2)$, $g(n) = \log(n)n^2$
2. $f(n) = (n+1)(n-1)(n+2)$, $g(n) = \frac{(n^2+1)(n^2-4)}{100}$
3. $f(n) = 2^n$, $g(n) = 2^{n-2}$
4. $f(n) = n + \sqrt{n}$, $g(n) = n + \log(n)$
5. $f(n) = n!$, $g(n) = n^2(n-2)!$
6. $f(n) = 1 + 2 + \dots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $g(n) = (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2) + \cdots + n$

EXERCICE 2. (4 points)
Faire une preuve d'arrêt et donner la complexité des deux boucles suivantes:

```
BOUCLE 1
  DEBUT
    i ← 1
    TQ i ≤ n FAIRE
      j ← 1
      TQ j*j*j ≤ n
        j ← j+1
      FTQ
      i ← i+1
    FTQ
  FIN
```

```
BOUCLE 2
  DEBUT
    i ← 1
    j ← n
    TQ i ≤ j FAIRE
      i ← i*2
      j ← ⌊j/2⌋
    FTQ
  FIN
```

EXERCICE 3. (5 points)

1. Écrire un algorithme `Min2(T,fin)` qui retourne les indices des deux plus petis éléments d'un tableau de taille n (on supposera que $n \geq 2$) entre les indices 1 et `fin`.

2. Combien de comparaisons sont effectuées dans les meilleurs et pire cas (en fonction de la valeur `fin`)? Quelle est la compléxité de l'algorithme ?

3. Écrire un algorithme `Tri2Selection(T)` qui tri un tableau de taille **paire** $n \geq 2$, à l'aide de l'algorithme précédent.

4. Quelle la compléxité de l'algorithme ?

Exercice 4. (4 points)

1. Écrire un algorithme de compléxité $\Theta(n)$ `NegatifPositif(T)` qui traite un tableau d'entiers de taille n et range tous les entiers négatifs ou nuls à gauche du tableau et tous les nombres strictement positifs à droite.

2. On considère un tableau rangé par l'algorithme précédent. Écrire un algorithme en $O(\log(n))$ qui retourne le nombre d'éléments positifs du tableau.

Exercice 5. (4 points)

1. Rappeler les procédures standards de manipulation des piles et des files ainsi que leurs complexités.

2. Expliquer comment simuler une file à l'aide de deux piles et donner la complexité des opérations standards dans ce cas.

21

I21: Algorithmique
Contrôle terminal - session 2
Licence 1 MATHS, SI

2017 (semestre 2) - Durée : 2h00

- Tous les documents, calculatrices et appareils de communication sont interdits.
- Le barême est donné à titre indicatif
- Toutes les réponses doivent être justifiées

Exercice 1. (3 points)
Pour chaque paire de fonctions f et g, dire si $f = O(g)$, $g = O(f)$ et $f = \Theta(g)$:

1. $f(n) = n\log(n^2)$, $g(n) = n^2$
2. $f(n) = n^5 - 4n^4$, $g(n) = \frac{(n^4+1)}{10}$
3. $f(n) = 2^{2n}$, $g(n) = 2^n$
4. $f(n) = n + \sqrt{n}$, $g(n) = n + \log(n)$
5. $f(n) = (n-1)!$, $g(n) = n(n-2)!$
6. $f(n) = n + 2n + 3n + \cdots + n^2$, $g(n) = n^3$

Exercice 2. (4 points)
Faire une preuve d'arrêt et donner la complexité des deux boucles suivantes:

```
BOUCLE 1
  DEBUT
    i , j ← 1 , n
    TQ i ≤ j FAIRE
      SI 2| i ALORS
        j ← j+1
      FSI
      i ← i+1
    FTQ
  FIN
```

```
BOUCLE 2
  DEBUT
    i ← 1
    j ← n
    TQ i ≤ j FAIRE
      j ← ⌊j/2⌋
    FTQ
  FIN
```

Exercice 3. (5 points)

1. Écrire, au choix, un des 3 algorithmes de tris vu en cours et prouver sa compléxité.

2. Écrire un algorithme itératif qui retourne `VRAI` si une chaîne de caractères est un palindrome et `FAUX` sinon. Analyser sa complexité en meilleur et pire cas. Les deux complexités doivent être différentes.

Exercice 4. (4 points)

1. Rappeler les complexités des algorithmes de recherche séquentielle et par dichotomie.

2. On considère un tableau contenant n éléments valant soit `NOIR` soit `BLANC` rangé par couleur (les éléments noir en premier et on admet qu'il contient toujours les deux couleurs). Écrire un algorithme de complexité $\log(n)$ (en justifiant) qui retourne le nombre d'éléments noirs.

Exercice 5. (4 points)

1. Rappeler les procédures standards de manipulation des piles et des files ainsi que leurs complexités.

2. Expliquer comment simuler une file à l'aide de deux piles et donner la complexité des opérations standards dans ce cas (cela veut dire en particulier qu'il faut réécrire les procédures standards).