Université de Toulon
Faculté des Sciences et Techniques
Année Universitaire 2014 – 2015

M1 PSI
Examen du cours Signal Aléatoire
Janvier 2015

Documents, calculettes et téléphones portables non autorisés.
Durée : deux heures.

Exercice n° 1

Soit $(X_t, t \in \mathbf{R})$ un SAS-2O centré dont la fonction d'autocorrélation C_{XX} est T-périodique, c'est-à-dire $C_{XX}(\tau + T) = C_{XX}(\tau)$, $\forall \tau$.

On définit $\gamma_n \triangleq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} C_{XX}(t)\exp\left(-2i\pi\frac{n}{T}t\right) dt$ et les variables aléatoires $A_n \triangleq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} X_t \exp\left(-2i\pi\frac{n}{T}t\right) dt$, pour $n \in \mathbf{Z}$.

1) Montrer que $E(A_n A_m^*) = \gamma_n$ si $m = n$, et $E(A_n A_m^*) = 0$ sinon.
2) On suppose que $(X_t, t \in \mathbf{R})$ est un signal aléatoire gaussien. Montrer que les variables aléatoires A_n sont indépendantes deux à deux.

Exercice n° 2

Soit $(X_t, t \in \mathbf{R})$ un SAS-2O à temps continu. On définit un autre signal aléatoire $(Y_t, t \in IR)$ par $Y_t = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} X_{t-k}$, $\forall t$.

1) Réécrire le signal $(Y_t, t \in \mathbf{R})$ comme un filtré du signal $(X_t, t \in \mathbf{R})$. Préciser la réponse impulsionnelle de ce filtre.
2) Quel résultat du cours permet d'affirmer que $(Y_t, t \in \mathbf{R})$ est lui aussi SAS-2O ?
3) Calculer $E(Y_t)$ en fonction de $\mu_X = E(X_t)$
4) Calculer la densité spectrale de $(Y_t, t \in \mathbf{R})$ en fonction de celle de $(X_t, t \in \mathbf{R})$.
   NB : Ce calcul ne nécessite pas le calcul des fonctions d'autocorrélation.

Exercice n°3

On considère un bruit centré $(B_t, t \in \mathbf{R})$ blanc dans la bande $[-f_{MAX}, f_{MAX}]$, c'est-à-dire que sa densité spectrale de puissance est constante sur la bande : $\Gamma_{BB}(f) = \nu$ si $f \in [-f_{MAX}, f_{MAX}]$ et $\Gamma_{BB}(f) = 0$, sinon.

Soit une fréquence $f_C \in]0, f_{MAX}]$ donnée.

1) Quelle est sa fonction d'autocorrélation ?

Soit $(Y_t,\ t \in \mathbf{R})$ le signal aléatoire obtenu en filtrant $(B_t,\ t \in \mathbf{R})$ par le filtre analogique de réponse impulsionnelle $h(t) = \dfrac{\sin(2\pi f_C t)}{\pi t}$ quand $t \neq 0$ et $h(0) = 2 f_C$.

2) Calculer l'espérance mathématique de Y_t ? Quelle est la fonction d'autocorrélation de $(Y_t,\ t \in \mathbf{R})$?

3) On échantillonne le signal $(Y_t,\ t \in \mathbf{R})$ à la période d'échantillonnage $\Delta t = \dfrac{1}{2 f_C}$. On obtient ainsi le signal aléatoire à temps discret $(Y_{k\Delta t},\ k \in \mathbf{Z})$. Quelle est la fonction d'autocorrélation de $(Y_{k\Delta t},\ k \in \mathbf{Z})$?

4) On filtre $(Y_{k\Delta t},\ k \in \mathbf{Z})$ par le filtre numérique causal de réponse impulsionnelle $h_n = \exp(-a n)$, pour n positif ou nul (le scalaire a est positif). Donner la fonction d'autocorrélation du filtré.