Université de Toulon

Licence 3 MASS. Mercredi 11 mai 2015.

Examen de Statistiques Décisionnelles

Avertissement: Barême donné à titre indicatif: I(3). II(7). III(7). IV(4).

Exercice 1: (formule de Spearman). Deux juges A et B classent chacun. sans ex-aequo les n participants d'un tournoi. Soient x et y les variables statistiques correspondantes. $x_i . y_i \in \{1.2.\cdots.n\}$.

1) Calculer les moyennes $\overline{x}$. $\overline{y}$. (Remarquer que tous les nombres de 1 à n figurent une et une seule fois dans l'échantillon).

2) Déterminer de même les variances $\sigma^2(x)$ et $\sigma^2(y)$

(on rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

3) On pose $D_i = x_i - y_i$ et $D^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i^2$ (désaccord entre les juges A et B). Montrer (en developpant $(x_i - y_i)^2$) que le coefficient de corrélation vérifie:

$$r(x.y) = 1 - \frac{6D^2}{n(n^2-1)}$$

Exercice 2: La duree de fonctionnement d'un composant electrique est donnee par une variable aleatoire suivant la loi de Weibull. de densite

$$f_\theta(t;\lambda) = \frac{\lambda}{\theta} t^{\lambda-1} \exp[-t^\lambda/\theta] 1_{t>0}$$

ou $\lambda > 0$ un parametre connu. et $\theta > 0$ une constante a estimer.

1) Montrer que X^λ suit une loi exponentielle.

2) Soit X_i un n-echantillon de X. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.

3) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais. Deduire du 1) son ecart quadratique moyen.

4) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur efficace, en utilisant la borne de Cramer-Rao sous la forme

$$\sigma^2(T) \geq \frac{g'(\theta)^2}{I(\theta)}. \quad I(\theta) = \mathrm{E}_\theta\big[-\frac{\partial^2 \log f_\theta}{\partial^2\theta}\big]$$

5) Verifier que $\widehat{\theta}_n$ est exhaustif.

Exercice 3: On veut étudier la durée de vie d'un certain type de lampes halogènes. La duree de vie suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1) Les paramètres μ et σ etant inconnus, on prélève un échantillon de 15 lampes A et on obtient une durée de vie moyenne $m = 2100$h avec une variance empirique corrigee $S^2 = 14400$h

a) Tester l'hypothese H_0: $\mu = 2050$h contre H_1: $\mu \neq 2050$h au risque $\alpha = 5\%$.

b) Tester l'hypothese H_0: $\sigma^2 = 40000$ contre H_1: $\sigma^2 \neq 40000$ au risque $\alpha = 5\%$.

2) On suppose $\sigma = 200$h. On prélève un échantillon de 100 lampes A et on obtient $m = 2030$h. Déterminer le test de Neyman-Pearson pour tester l'hypothèse H_0: $\mu = 2000$h contre H_1: $\mu = 2050$h au risque $\alpha = 5\%$. Quelle est la puissance de ce test?

3) On modifie les lampes de type A pour augmenter leur durée de vie, ce qui donne les lampes de type B ~~B~~. On prélève un échantillon $n_A = n_B = 60$ et on observe $m_A = 2040$h, $S_A = 180$h, tandis que $m_B = 2120$h et $S_B = 150$h.

a) Tester l'hypothèse H_0: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ contre H_1: $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ au risque $\alpha = 5\%$.

b) Peut on considérer que les 2 types de lampes ont une durée de vie équivalente au risque de 5%? (test de différences).

Exercice 4: On jette 20 fois une pièce pour savoir si elle est équilibrée. Si la différence entre 10 et le nombre de Face est supérieure ou égale à 5 en valeur absolue, on rejette la piece.

1) Déterminer le risque de 1:ère espèce α.

2) Déterminer le risque de 2:ème espèce β si la probabilité de Face est 0.45.