S3

L3 MATH

EXAMEN DE L3-Probabilité. Janvier 2014. Note sur 20.
N.B. : le cours est autorisé.

Exercice 1.
Soit Ω un univers dénombrable et $\mathbb{P} : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}^{+}$ une fonction d'ensemble à valeurs réllés non-negatives.

1. Montrer que $\mathbb{P}$ est σ-adittive (c-à-d $\mathbb{P}$ d'une réunion disjointe est la somme des $\mathbb{P}$ appliquées aux parties de la réunion), si et seulement si

$$\forall A \in 2^{\Omega},\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

2. Supposons à nouveau que Ω est un univers dénombrable et cette fois-ci $\mathbb{P} : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ est une probabilité. Montrez que $\mathbb{P}$ ne peut pas être une *équiprobabilité* sur Ω.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes avec densité exponentielle $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Montrez que le couple de variables aléatoires $U = X + Y$, $V = X/Y$ sont indépendantes en calculant la loi du couple (U, V).

Exercice 3. Soit X la variable de Poisson : $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Calculez la fonction génératrice de la variable aléatoire $Y = 3X + 2$.

Exercice 4. Trois variable aléatoires X, Y, Z définies sur le même universe ont le densité conjointe

$$f(x, y, z) = c\ xyz,\ \ 0 < x, y, z < 1$$

Déterminer la valeur de c et calculer la probabilité de l'évènement $\{X < Y < Z\}$.
Exercice 5.

Un magasin dispose des boîtes chacune contenant N téléphones. On dénote avec p_k la probabilité qu'une boîte contient k téléphones défectueux, avec $0 \leq k \leq m$. Un échantillon de n téléphones est pris d'une boîte et l'on remarque que $r \leq m$ téléphones sont défectueux. Calculer la probabilité que la boîte choisie contient $k \geq r$ téléphones défectueux.
(Idée : introduire les évènements : A_k= {la boîte contient k téléphones défectueux} ; E_r={dans un échantillon de n téléphones, r sont défectueux} ; ensuite procédez en calculant $\mathbb{P}[E_r|A_k]$...)