61 9 R

Université de Toulon
Licence 3 MASS, Mardi 15 mai 2014.

Examen de Statistiques Décisionnelles

Avertissement: Barême donné à titre indicatif: I(3), II(4), III(7), IV(6). Une attention particulière sera portée à la façon d'utiliser les tables.

Exercice 1: Dans un jeu télévisé, 2 juges A et B élisent m participants d'un même groupe de n candidats, en éliminant les autres. Soient x et y les variables statistiques correspondantes, $x_i, y_i \in \{0,1\}$, 0 si le candidat numéro i est éliminé, 1 sinon.

1) Que valent les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$? Déterminer de même les variances $\sigma^2(x)$ et $\sigma^2(y)$.

2) On pose $p = \frac{m}{n}$ et $D^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$ (désaccord entre les juges A et B). Montrer que le coefficient de corrélation

$$r(x,y) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

satisfait

$$r(x,y) = 1 - \frac{D^2}{2p(1-p)n}$$

[on développera $\big((x_i - \overline{x}) - (y_i - \overline{y})\big)^2$]. Vérifier que $D^2 \leq 2m$.

Exercice 2:

1) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ une loi de Poisson, on observe un n-échantillon X_i. On rappelle que $n\overline{X} \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

a) Montrer que $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de λ.

b) On veut estimer λ^2 par l'estimateur $\overline{X}^2$. Montrer que son biais est λ/n.

c) Trouver un estimateur sans biais de λ^2.

2) Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ une loi exponentielle, on observe un n-échantillon X_i. On rappelle que $n\overline{X}$ a pour densité

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} t^{n-1}}{(n-1)!} 1_{\{t \geq 0\}}$$

a) Montrer que $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de λ^{-1}. Comparer cet estimateur avec l'estimateur du maximum de vraisemblance.

b) On veut estimer λ^{-2} par l'estimateur $\overline{X}^2$. Calculer son biais.

c) Déterminer un estimateur sans biais de λ^{-2} à partir de $\sum X_i^2$ et $\sum X_i$.

Exercice 3: On veut contrôler le temps de réponse d'un lot de transistors. On prélève un échantillon de 20 transistors, et on obtient un temps de réponse moyen de 1.51 seconde.

1) On suppose que le temps de réponse X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, 0.04)$ de moyenne inconnue. On définit le test unilatéral $H_0 : \mu = 1.5$ contre $H_1 : \mu = 1.6$ par

$$\text{Rejet de } H_0 \iff X \geq u$$

Calculer la région critique au risque de première espèce α=5%, puis déterminer la puissance du test. Peut-on accepter H_0?

2) On suppose que le temps de réponse suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de moyenne et de variance inconnues.

Peut-on accepter $\sigma = 0.05$ au risque de 5% si $Q = \sum_{n=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2 = 0.11$?

3) On dispose maintenant de 2 lots de transistors qui suivent des lois normales de variance respectives σ_A^2 et σ_B^2. On prélève un 15-échantillon dans le premier pour lequel $Q_A = 0.13$, et un 25-échantillon dans le deuxième pour lequel $Q_B = 0.10$.

a) Calculer les variances empiriques corrigées de chacun des échantillons.

b) Tester l'hypothèse $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ contre $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ au risque de 5%.

Exercice 4:

1) Le nombre X de clients fréquentant un supermarché au cours d'une journée suit une loi de Poisson a priori de paramètre λ. Le nombre de clients payant avec leur carte de crédit est une variable observée Y qui suit une loi binômiale. Calculer $\mathrm{P}(Y = k|X = n)$, puis determiner la distribution $\mathrm{P}(Y = k)$. Quelle est la loi a posteriori de X au vu de l'observation k?

2) Soit $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ une loi exponentielle. On considère $X = e^Y$ (loi de Pareto).

a) Montrer que X a pour densité $f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} 1_{]1,+\infty[}(x)$. Determiner, si elles existent, son espérance et sa variance.

b) On observe une variable binômiale $B(n, p)$ de paramètre $p = \frac{1}{X} 1_{]1,+\infty[}(X)$, où la loi a priori de X a la densité $f_\lambda(x)$. Quelle est la loi a posteriori de X?

c) Déterminer un estimateur bayesien de X, son biais, et son risque quadratique moyen.