Examen de Méthodologie Maths
L1 MASS
08 octobre 2013

Durée de l'épreuve: 1h00
Documents et calculatrice interdits
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. i) Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes

(1) $\exists R \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = R^2$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists R \in \mathbb{R}_+, x^2 + y^2 = R^2$.

ii) Les assertions (1) et (2) ci-dessus sont elles vraies ou fausses ?

Exercice 2. i)Expliquer le principe d'un raisonnement par contraposée.
ii) Montrer que l'assertion suivante est vraie (n désigne un nombre entier):

$$n \text{ pair} \iff n^2 \text{ pair}.$$

Exercice 3. On pose $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

1) Montrer par recurrence que $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On pose, $S' = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$ et $S'' = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$.

2) Exprimer S' en fonction de S.
3) En déduire une expression simple pour S' et S''.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n, \quad \text{avec} \quad 0! = 1$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1.$$

21 a ''

UTLN. Licences L1 Mass et Maths MS22

Examen d'algèbre linéaire : Deuxième session: juin 2014

Durée : 2h

Aucun document ni calculette n'est autorisé.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 :

1) Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de F.

2) Montrer que le sous espace vectoriel G engendré par le vecteur $e = (0, 1, 0)$ est un sous espace supplémentaire de F.

3) Montrer que l'ensemble $H = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \det A = 0\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2.

Exercice 2 :

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) L'application f est-elle bijective?

2) Déterminer une base de son noyau

3) Déterminer une base de son image

4) Soit les 3 vecteurs $u = (1, -2, 0)$, $v = (-3, 5, 1)$, $w = (0, 0, 1)$.

4-1. Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

4-2. Déterminer les images $f(u)$, $f(v)$, $f(w)$. En déduire la matrice B de f dans la base $\{u, v, w\}$

4.3. Donner les matrices de passage $P_{A \to B}$ et $P_{B \to A}$

4-4. Quelle est la relation matricielle liant A et B ?

Exercice 3 :

Discuter et résoudre le système

$$(S_a) \qquad \begin{cases} x + ay + (a-1)z = 0 \\ 3x + 2y + az = 3 \\ (a-1)x + ay + (a+1)z = a, \end{cases}$$

où l'inconnue est (x, y, z) et $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre