Université du Sud Toulon-Var

Licence L3 MASS, 12 Janvier 2012

Examen de Probabilités

Avertissement: Durée: 3h. Documents personnels et calculettes autorisés.

On rappelle la formule de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \ n \to \infty$$

Exercice 1 [4 pts]: Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 3$).

1) On effectue n tirages sans remise d'un jeton.

Calculer la probabilité des évènements A_n: "les jetons 1,2,3 sont apparus dans cet ordre", et B_n: "les jetons 1,2,3 sont apparus dans cet ordre à des tirages consécutifs".

2) On effectue les tirages avec remise. Calculer les probabilités de A_n et B_n, et déterminer un équivalent de $\mathrm{P}(A_n)$ et $\mathrm{P}(B_n)$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2 [4 pts]: Le nombre X de passages à un péage d'autoroute au cours d'une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1) La probabilité qu'un client utilise le télépéage est p. Soit Y le nombre de clients utilisant le télépéage. Calculer $P(Y = k|X = n)$.

2) Montrer que Y suit encore une loi de Poisson.

3) La probabilité que le compte d'un client qui paye avec sa carte de crédit ne soit pas approvisionné est q. Soit Z le nombre de clients qui ont payé avec une carte dont le compte n'est pas approvisionné. Déterminer la loi de Z.

Exercice 3 [6 pts]. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On considère $X = e^Y$.

1) Déterminer la fonction de répartition F_X de X et sa loi de survie $\mathrm{P}(X > x)$.

2) Vérifier que X a pour densité $f(x) = \lambda x^{-\lambda-1} 1_{]1,+\infty[}(x)$ (loi de Pareto de paramètre λ).

3) Calculer $\int_0^\infty \mathrm{P}(X > t)dt$ suivant les valeurs de λ. Que vaut $\mathrm{E}(X)$?

4) Soient X_1, X_2 deux variables de Pareto, indépendantes et identiquement distribuées, de paramètre λ. Déterminer la loi de $Z = \frac{X_1}{X_2}$.

[On pourra opérer de la façon suivante: dans le calcul de l'intégrale

$$\int\int 1_{]0,\zeta[}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) f(x_1) f(x_2)\, dx_1\, dx_2$$

faire le changement de variables $(x_1, x_2) \mapsto (t, z)$, $t = x_1 x_2, z = \frac{x_1}{x_2}$ et déterminer le domaine d'intégration. On commencera par le cas où $\zeta \leq 1$.]

Exercice 4 [6 pts] On considère une marche aléatoire bilatère sur $\mathbf{Z}$: une particule se déplace sur l'axe, chaque pas, en avant ou en arrière, ayant la probabilité $p = \frac{1}{2}$. La particule est en O à l'instant $t = 0$.

1) Soit X_n l'abscisse au temps $n \in \mathbf{N}$. Calculer la distribution $\mathrm{P}(X_n = j)$, pour tout $j \in \mathbf{Z}$.

2) On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon. Montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathrm{P}(O_{2k+1} = 1) = 0, \quad \mathrm{P}((O_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$$

3) Soit U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ ($n \geq 1$). Exprimer U_n en fonction des O_k.

4) Montrer (par exemple par rcurrence) que:

$$\mathrm{E}(U_n) = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$$

et trouver un équivalent de U_n quand $n \to \infty$.

2

Université du Sud Toulon-Var
Licence L3 MASS. Juin 2012

Examen de Probabilités

Avertissement: Durée: 2h. Documents personnels et calculettes autorisés.

Exercice 1 [4pts] Une compagnie aérienne remarque qu'en moyenne 4% des réservations sur un vol donné ne sont pas utilisées. Elle vend 230 billets. Soit X le nombre de désistements, X suit donc une loi binômiale dont on determinera les paramètres.

1) Il n'y a que 226 places sur ce vol. Calculer la probabilité que tous les passagers soient admis.

2) Donner une valeur approchée de $\mathrm{P}(X \geq 2)$, en approximant la loi binômiale $B(n,p)$ par une loi de Poisson.

3) Quelle est encore la probabilité qu'il reste une place vide?

Exercice 2 [8pts]

1) Un pion avance avec la probabilité p et reste sur place avec la probabilité $1-p$. A l'instant $t=0$, il est en O. Soit X_n son abscisse au temps n.

a) Calculer $\mathrm{P}(X_n = k)$.

b) Calculer $\mathrm{E}(X_n)$, et $\sigma^2(X_n)$.

2) Cette fois le pion avance avec la probabilité p et recule avec la probabilité $1-p$. Soit Y_n son abscisse au temps n.

a) Calculer $\mathrm{P}(Y_n = j-(n-j))$, puis $\mathrm{P}(Y_n = k)$, pour $k \in \mathbf{Z}$.

b) Calculer $\mathrm{E}(Y_n)$, et $\sigma^2(Y_n)$. Quelle est la valeur $p = p_0$ pour laquelle $\sigma^2 = \sigma^2(Y_n)$ est maximale? Soit σ_0^2 la valeur correspondante. Calculer $\sigma^2 - \sigma_0^2$ (σ_0^2 répresente la variance du mouvement brownien).

3) Deux joueurs A et B jouent à tour de rôle, A gagne 1 point avec la probabilité p, B en perd un avec la même probabilité.

a) Quelle est l'espérance du gain de A au bout de n parties?

b) On suppose $p = 1/2$. Sachant que A possède au départ un capital de n points, quelle est la probabilité qu'il soit ruiné au bout des n premières parties?

3

Exercice 3 [5pts] Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables indépendantes, telles que $\mathrm{E}(X_i) = m_i$, $\sigma^2(X_i) = \sigma_i^2$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\sigma_i^2 \leq M$ pour tout i.

Pour $n \geq 1$, on considere la variable aleatoire $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, avec $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$.

1) Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$(*) \qquad \forall c > 0,\ \mathrm{P}(|X - m| \geq c) \leq \frac{M}{c^2 n}$$

2) On teste n circuits imprimés de diverses fabrications, chaque test suit une variable de Bernoulli X_i, avec probabilité de réussite du test i égale a p_i. Montrer que

$$\mathrm{P}(|X - m| \geq c) \leq \frac{1}{4nc^2}$$

3) Le nombre de véhicules passant à un péage à l'heure i suit une loi de Poisson de parametre λ_i, avec $0 < \lambda_i \leq \lambda$. Montrer que le nombre moyen X de passages entre les heures 1 et n vérifie une relation du type (*) où on déterminera m et M.

Exercice 4 [3pts] La densité conjointe de deux variables aléatoires indépendantes X et Y est donnée par

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} 1_{\{x>0\}\cap\{y>0\}}$$

1) Quelles sont les lois de X et de Y?

2) Déterminer la densité de $Z = \frac{X}{Y}$.