USTV. L2 Maths , session Janvier 2010

EXAMEN Séries et intégrales généralisées, M32.
12 janvier 2010. Durée : 3H

L'usage des documents et des calculettes n'est pas permis. Le barème est donné à titre indicatif.

EXERCICE 1 (6 points) Discuter, s'i l y a lieu suivant les valeurs du paramètre $\alpha > 0$, la convergence et la convergence absolue des séries suivantes:

$$a) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \log(1-\frac{1}{n^\alpha}) \quad , \quad b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \ ,$$

$$c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^\alpha} \quad , \quad d) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \ .$$

(pour c) on établira que la suite $\frac{\log n}{n^\alpha}$ est décroissante à partir d'un certain rang)

EXERCICE 2 (6 points) Discuter (s'il y a lieu suivant les valeurs du paramètre $\alpha \geq 0$), la convergence et la convergence absolue des intégrales généralisées suivantes:

$$a) \quad \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}} \quad , \quad b) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha} dx \ ,$$

$$c) \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx \quad , \quad d) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+\cos x)^\alpha} dx \ .$$

(pour d) on remarquera que la fonction $x + \cos x$ est monotone croissante sur $\mathbb{R}^+$).

EXERCICE 3 (4 points) On considère la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := n x^n \log x \quad \text{si } x > 0 \quad , \quad f_n(0) = 0 \ .$$

1) Calculer la limite simple de f_n.
2) La convergence de f_n est elle uniforme sur $[0,1]$? (songer à la suite $x_n = 1 - \frac{1}{n}$). Monter que la convergence est uniforme sur $[0,a]$ pour $a < 1$?
3) Calculer la limite quand $n \to \infty$ de $I_n := \int_0^1 f_n(x)dx$. Conclusion ?

EXERCICE 4 (4 points) Soit θ un paramètre réel. Montrer que les séries entières ($z \in \mathbb{C}; x \in \mathbb{R}$):

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad , \quad T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n \quad , \quad U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(n\theta),$$

ont le même rayon de convergence que l'on calculera. En déduire la valeur de $\limsup_{n\to\infty} |\cos(n\theta)|^{1/n}$.

Donner une expression explicite de $S(z), T(z)$ et $U(x)$.

FIN

Université du Sud Toulon-Var

Licence L2 Math. M42. 1er Juin 2010

Examen de Probabilités

Avertissement: Durée: 3h. Les documents personnels et les calculetttes sont autorisés. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 [5pts]: Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules rouges. On y procède à des tirages sans remise. On note N_i (resp. R_i) l'évenement: la boule numéro i est noire (resp. rouge).

a) Calculer de 2 manières les probabilités $P(N_2)$ et $P(N_3)$.

b) Quelle est la probabilité de N_3, sachant que les 2 premières sont rouges ?

c) On obtient une boule rouge au troisième tirage. Quelle est la probabilité pour qu'on ait amené une boule rouge et une boule noire (dans un ordre quelconque) les 2 premières fois ?

Exercice 2 [5pts]: Une urne contient 6 boules numerotées, dont on retire 2 au hasard. On note par X, (resp. Y) le plus grand (resp. le plus petit) des nombres obtenus.

a) Dans le cas d'un tirage avec remise, déterminer la loi des variables X et Y, leur espérance et leur variance.

b) Memes questions dans le cas d'un tirage sans remise.

c) Déterminer dans les 2 cas la loi conjointe du couple (X, Y), la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y.

d) Comparer les lois marginales du couple dans les 2 situations.

Exercice 3:[5pts] On considere 2 urnes, U_1 contenant 2R et 3B, U_2 contenant 4R et 3B, dans lesquelles on effectue des tirages avec remise, de la façon suivante:

On commence par faire un tirage dans l'urne U_1. Si la boule est R, on recommence. Sinon, on effectue le 2e tirage dans U_2. Si la boule est B, on tire une nouvelle boule dans U_2. Si la boule est R, on reprend a nouveau l'urne U_1, etc... Soit X_n (resp. Y_n) le nombre de boules R (resp. B) tirées au cours des n premiers coups (avec la convention $X_0 = Y_0 = 0$).

a) Donner une relation entre X_n et Y_n. Calculer $P(X_j = 1)$ et $P(Y_j = 1)$ pour $j = 1, 2, 3$.

b) Calculer les probabilités de transition $P(X_{j+1} = 1 | X_j = 0)$ et $P(X_{j+1} = 1 | X_j = 1)$.

c) Etablir une relation de récurrence permettant de calculer $P((X_{n+1}, Y_{n+1}) = (a, b))$ en fonction de $P((X_n, Y_n) = (a-1, b))$ et $P((X_n, Y_n) = (a, b-1))$.

d) En déduire $P((X_2, Y_2) = (a, b))$, pour $0 \leq a \leq 2$ et $0 \leq b \leq 2$. Comparer $P(X_2 \geq Y_2)$ et $P(X_2 \leq Y_2)$.

Exercice 4[6pts]: Le nombre X de clients fréquentant un supermarché au cours d'une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Rappeler la distribution de la loi de Poisson, son espérance et sa variance.

b) La probabilite qu'un client utilise sa carte de crédit est p. Soit Y le nombre de clients payant avec leur carte de crédit. Calculer $P(Y = k|X = n)$.

c) En déduire la distribution $P(Y = k)$. Déterminer l'esperance et la variance de Y.

d) Calculer la probabilité p_N qu'au mois N clients aient utilisé leur carte de crédit. Trouver un équivalent de p_N quand $N \to \infty$.

4