Université du Sud Toulon-Var
Département de Mathématiques

L3 MASS 2009/10
EXAMEN de M55 - Probabilités
mardi 12 janvier 2010

Durée de l'épreuve : 3h00

Calculatrice autorisée. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
Les questions et exercices "optionnels" sont notés en points supplémentaires.

Exercice 1. Pour l'organisation d'une compétition sportive, on dispose d'un gymnase de 4000 places. La totalité des places est vendue par l'intermédiaire des clubs. On sait qu'habituellement, 80% des billets distribués en club sont vendus.
i) Si la fédération a distibué exactement 4000 billets, quelle est la probabilité que le stade soit au moins rempli aux 3/4 ?
ii) Combien de billets la fédération peut-elle distibuer au maximum, pour être sûre à 90% au moins qu'il y ait des places pour tous ceux qui possèdent un billet ?

Exercice 2. Une compagnie compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure. Quel est approximativement le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à $0,025$.

Exercice 3. Le nombre $N(t)$ de particules émises par un appareil radioactif au cours d'un intervalle de temps t est gouverné par un processus de Poisson de taux λ.
i) On suppose d'abord que $\lambda = 4$. Quel est le nombre moyen de particules émises pendant un intervalle de temps de longueur 10. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de 3 particules émises pendant l'intervalle de temps $]0, 3]$.
ii) On suppose maintenant λ quelconque. Sachant que pendant un intervalle de temps de longueur 1, l'appareil a émis 9 particules, quelle est la probabilité que 3 particules aient été émises dans l'intervalle de temps $]0, \frac{1}{2}]$.
iii) (**question optionnelle**). En face de l'appareil radioactif, on dispose un détecteur. Cet appareil détecte une particule émise par l'appareil radioactif avec probabilité p (et ne ne la détecte pas avec probabilité $1-p$). Soit $K(t)$ le nombre de particules détectées pendant l'intervalle de temps $]0, t]$. Montrer que $K(t)$ est un processus de Poisson de taux λp.

Exercice 4. La détection d'une maladie infectieuse chez un homme qui présente certains symptômes recquiert trois examens consécutifs (numérotés 1, 2, et 3). Si l'un des examens est négatif, le sujet est déclaré sain ; si les trois examens sont positifs, le sujet est infecté.

Pour chaque sujet, on commence par effectuer l'examen 1. Il y a alors trois possibilités :

- Avec probabilité r, l'examen est positif, et on procède alors à l'examen suivant ;
- avec probabilité p, l'examen est négatif, et on arrête la série d'examens car le sujet est alors déclaré sain ;
- avec probabilité $q = 1-r-p$, l'examen n'a pas fonctionné correctement et il faut le recommencer.

On procède de façon identique pour les examens 2 et 3, pour lesquels on a les mêmes probas p, q, et r. Si l'examen 3 est positif (probabilité r), le sujet est déclaré infecté.
i) Construire une chaîne de Markov à cinq états qui modélise ce processus. Montrer qu'il s'agit d'une chaîne de Markov absorbante. Donner la matrice de transition associée.

Pour toute la suite, on suppose $r = 0,6$ et $p = 0,1$. Calculer la matrice fondamentale. (on pourra donner les valeurs approchées des éléments de matrices à 10^{-1} près.
ii) Trouver le nombre moyen d'examens nécessaires avant d'obtenir un diagnostic sur le sujet.
iii) Quelle est la probabilité qu'un sujet soit infecté ?

Exercice 5. Un ordinateur de bureau est dans l'un des 3 états suivants : En fonction (F), en réparation (R), ou irréparable et bon pour le recyclage (I). Si l'ordinateur fonctionne, la probabilité qu'il fonctionne le jour suivant est de $99,5\%$, et la probabilité qu'il nécessite une réparation est de $0,5\%$. S'il est en réparation, il y a 5% de chance qu'il nécessite encore d'être réparé le jour suivant, et 5% de chance qu'il soit définitivement irréparable.
i) Sachant qu'un ordinateur est en parfait état de marche le 1er jour, quelle est la probabilité qu'il soit en réparation le 3ème jour ?
ii) Quel est le nombre moyen de jours qu'un ordinateur passe en état de marche avant d'être recyclé ? Quel est le nombre moyen de jours que l'ordinateur passe en réparation avant d'être recyclé ?

Exercice 6. (exercice optionnel) Tous les midis, une personne fait le choix de déjeuner soit dans un restaurant "fast food", soit au restaurant du coin "chez Momo". Lorsqu'un jour cette personne a mangé "chez Momo", elle a 80% de chances d'y retourner le lendemain. Lorsqu'elle a mangé au restaurant "fast food", elle a 60% de chance d'y retourner la fois suivante.
i) Sachant que la personne a mangé au restaurant fast-food le lundi, quelle est la probabilité qu'elle se retrouve "Chez Momo" le mercredi ?
ii) Sachant qu'elle a mangé au restaurant fast-food le jour 1, quelle est la probabilité qu'elle soit au restaurant "Chez Momo" le jour $n+1$?
iii) Quel est le nombre moyen de fois que la personne a passé au restaurant "chez Momo" ?

2